数学教学

2005年第2期

目　　录

2004年数学教育高级研讨班纪要

执笔: 张奠宙

教育部人事司批准举办的数学教育高级研讨班, 于2004年12月10日至14日在广西南宁举行. 研讨活动的承办单位是广西自治区教育厅和广西师范大学数学计算机科学学院. 12月11日, 西南师大宋乃庆校长主持研讨班开幕式. 广西教育厅黄宇副厅长、广西师大杨善朝院长出席讲话. 到会同志以热烈的掌声对他们的领导和会议的组织工作表示深切的感谢.

参加研讨班活动的有100多位专家学者. 南京大学和全国6所重点师范大学均有学者出席. 国内的数学教育方向上的博士, 多半到会研讨. 这次研讨班, 还特别邀请了研究小学数学教育的专家参加, 扩大了研讨的范围. 参加研讨的主要组织者和发言者有: 张奠宙、宋乃庆、郑毓信、涂荣豹、邱学华、唐瑞芬、戴再平、罗增儒、马岷兴、田载今、李海东、沈文选、曹一鸣、孔凡哲、李俊、孔企平、黄荣金、李忠如、喻平、鲍建生、康武、黄勇、聂必凯、马复、王继延、王建明、张丹、张晓霞、龙开奋、唐高华、吴康、刘晓玫、刘静、田中、蔡东彩等. 来自中小学的数学教师有张思明、龚雷、林敏、林良富等. 澳门的张国祥、汪甄南也参加了研讨活动.

会议除进行全体会议和分组会议之外, 还参加了广西“探究性”数学教学展示会的活动. 部分到会者参与评课, 和广西的广大数学教师进行交流. 12月12日晚间, 高等教育出版社马丽就《数学教育概论》的出版召开了座谈会.

本次研讨的主题是“基础与创造”. 本着“发扬传统、关注现实、理论探讨、总结经验”的精神, 研讨活动紧张而有序, 普遍反映学术气氛浓厚, 收获丰硕. 研讨的主要成果有:

一、总结与发展数学“双基”的优良传统

张奠宙首先就“双基”和“双基数学教学”作了界定. “双基”指“基本知识和基本技能”, 依照传统不宜改变. 至于“双基教学”, 则是指“在强调掌握双基的基础上进行发展和创新.” 中国数学教育重视“双基”, 但是不等于只抓“双基”.

邱学华的演讲, 首先将我国1949年以来的数学教学分为7个阶段. 然后提出:“数学双基教学”萌芽于五十年代初, 形成于六十年代初, 发展于八十年代初. 进入21世纪, 双基教学在创新教育的指导下, 面临新的发展机遇, 正在重新认识. 没有基础的创新是空想, 没有创新指导的打基础是傻练, 这已经成为大家的共识.

涂荣豹的演讲, 着重分析了中国数学教学的五大特征. (1) 我国在落实教学目标上对双基采取强有力的措施, 每章、每单元、每节课的目标和要求都加以细化 (知识、技能、方法), 并且具有可操作性. (2) 长于由数学内部的“旧知”引出“新知”. (3) 对新知识注意逻辑辨析和深层次理解, 对新概念或新命题中关键性语句进行咬文嚼字地分析. 利用变式教学 (辨析题、变式题) 深入认识新知识的本质属性, 概括出新知识的若干要义或注意点. (4) 特别重视解题, 主要是数学内部的形式化问题. 强调以概念和定理为依据, 关注解题基本方法的熟练掌握, 重视解题思路的探求, 注重一题多解, 发展数学思维能力. (5) 及时巩固, 强化练习. 当堂有练习, 课后有作业, 单元有小考, 学期有大考. 理念是: 趁热打铁、熟能生巧、拳不离手、曲不离口. 涂荣豹指出, 这些做法, 既是优点, 也是缺点. 对双基的强化训练很容易过度, 如果不注意发展和创新, 就会发生“基础过剩”, 危害中华民族的创新灵魂.

李忠如在发言中着重谈了“双基”可能异化的问题.

马复在发言中, 强调数学双基必须“与时俱进”. 过去的“基本知识”今天也许就不是基本的了.

李俊提到日本、新加坡在一些重大国际数学教育测试中多次名列前茅, 但是他们都没有沾沾自喜, 而是找差距. 因此, 我们也不可以把学生的数学笔试成绩好, 太当一回事, 以免忽视自身存在的问题.

王建明注意从东方文化上分析中国数学教学.

二、研究“双基数学教学”的现状, 关注现实, 服务现实

面对数学教育的现实, 是数学教育高研班的传统. 正在进行的教学改革可以说是数学教育的一次“范式革命”. 在前进过程中, 如何处理“基础与创造”的关系, 再次引起人们的关注. 南京大学郑毓信教授指出:“将努力培养学生的创新意识列为学校教育的主要目标之一, 正是对于重视基础的中国传统的重要突破与发展. 然而, 两者在一定程度上的对立则又十分清楚地表明了实现这一目标的艰巨性. 新数学课程标准的大方向是正确的, 实践中出现一些问题并不奇怪. 发现问题、正视问题、解决问题, 才能取得不断的进步. 对于教师在教学中出现的某些倾向, 不可指责, 领导者应多进行反思”.

孔企平就小学的教学现状, 对数学“双基”的落实进行了分析. 他认为, 知识转化成能力是“双基”教学的关键环节. 现在有两种偏向: 一是“灌输型的”: 以本为本的备课, 满堂灌或满堂问, 简单化的练习, 追求惟一的标准等. 另一方面是“浅层次”的教学: 情景简单化, 活动形式化, 偏离学科目标. 操作活动没有有效的升华, 探索活动没有必要的指导, 合作交流脱离独立的思考, 实践活动没有问题的引导.

针对“结果并不重要, 过程才是重要的”的提法, 孔凡哲就“过程与结果可以兼得吗?”为题作了发言. 他在肯定当前教改成就的同时, 指出目前存在的五个误区:“为讨论而讨论”、“为合作而合作”、“为活动而活动”; 小组合作学习流于形式; 过于追求教学的情境化; 教师在课堂上不敢正面陈述; 不能及时介入学生的学习活动. 这些不利于数学“双基”的形成.

曹一鸣在发言中提出了“数学化和生活化哪一个更重要的问题”.

张丹用大量的课例说明“基础和创造相结合”的必要性和可能性.

张思明指出, 只有内驱力的训练才是有意义的.

在讨论中, 大家肯定近几年来在“双基”发展、基础与创新相结合方面的成就. 应该进一步研究的是, 如何在双基教学中挖掘“创新因素”, 以及在探究性学习中怎样注意结合“双基”. 把握好“度”是最重要的.

三、探索“双基”的理论基础

数学双基教学是我国的优良传统, 但是以前一直停留在经验层面上. 研讨班的重要目标是力图构建“双基”的理论框架.

康武介绍了“创造教育”的心理学研究最新成果. 同时也介绍了“基础”和“创新”关系的心理学研究. 他报告说, 基础和创新之间, 有的研究说二者是正相关, 有的说是负相关, 有的甚至说是矛盾相关. 这引起了大家的关注. 过多、过死的基础可能会影响创造力的发挥.

鲍建生的演讲有许多自己的新思考. 他借用ACT-R理论, 即“学习与认知的简单理论”解释双基. 该理论的一个基本观点是: 复杂认知是由相对简单的知识单元(knowledge units)所组成的, 而这些知识单元则是通过相对简单的原理(principles)而获得的. 人类的认知活动是通过基本元素和原理的复杂组合而完成的. 这正如计算机可以通过简单的二进制运算完成复杂的任务一样. 鲍建生认为, 双基就是这样的基本元素和原理. 中国数学“双基”的基本元素中包含定理法则, 起点高; 知识结构容量大; 特别是有典型例题, 将知识、技能、方法整合起来, 综合性强. 鲍建生还提到ACT-R理论中“Big idea”(大观念)的作用. 中国“双基”需要有大视野的数学意识加以提升. 这种“大观念”和我们常说的“数学思想方法”有共同之处, 都是要跳出“知识和技能”本身进行考察, 用更

高层次的数学观念进行思考. 可惜的是, 现今的中学数学方法论著作, 往往被弱化为“解题方法”(波利亚的解题方法也没有大观念). 我们应该多研究“变化中的不变量”、“线性关系与非线性”、“等价关系与方程”、“说明与证明”等等大观念的认知与运用.

喻平关于命题系、命题域的研究(CPFS)是我国对“双基”研究的一个收获, 值得进一步深入.

李士锜关于“熟能生巧”、“熟能生笨”、“熟能生厌”的研究为大家经常引用. 鲍建生还引用学习指数率说明, “至少要有40次的重复才能熟练”.

继田中制作整式运算的量表, 并在江苏进行3000样本的调查之后, 张晓霞又制定了小学运算能力的量表, 在四川进行了大样本的调查, 通过详细的统计分析, 得出了我国6年级小学生运算能力的一系列“量化”的结论, 受到一致好评. 这样的工作, 本应该由国家统一计划实行, 可惜教育研究规划很少注意到这样的基础研究.

在“双基”理论研究上, 张奠宙提出了以下的四个维度: 速度与效率(没有速度就没有效率); 记忆与理解(在记忆的基础上进行理解); 严谨与直观(在直观确认的基础上保持严谨); 重复与变式(通过变式的重复获得技能).

这里, 速度、记忆、严谨、重复, 在某些教育理论中已经消失, 被认为是落后、机械的东西. 事实上, 这正是双基的核心. 我们的任务不是丢掉它们, 而是通过效率、理解、直观、变式等等发展它们, 在创新教育的指导下得到升华.

四、寻求“双基”与“创新”的结合

研讨班上有许多演讲涉及如何发展双基的经验, 出现了一批将基础与创新紧密结合的成果. 其中包括黄荣金等的“变式教学”研究, 龚雷和戴再平的“数学双基与开放题研究”, 王继延关于“中考题体现创新”的研究, 马岷兴等关于“数学作文”的研究, 黄勇关于“计算机技术”进入“双基”的研究.

研讨班上还提到了“中国九九表的教学”、“知识点和创新点的研究”、“程序性数学和思辨性数学”的关系、“基础性数学的学习是否能体现个性?”、“为什么一开始小学生都认为$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$?”等等问题, 希望今后进一步深入.

研讨班有意识地请三套依“新课标”编写的初中教材的编者进行演讲(人民教育出版社、北师大出版社、华东师大出版社). 大家交换了看法. 各本教材的改革理念在原则上是相同的, 但是具体的处理方法和重点并不相同.

田载今和李海东的发言, 就几何教学和逻辑证明为体进行阐述. 他们认为, 几何教改是重点, 推理证明是焦点, 创新是热点. 数学教学要培养创新精神, 靠生活化、应用、技巧是不够的, 主要途径是通过反映数学自身发展的创造性, 靠数学自身的魅力, 使学生知道这些创造的来龙去脉, 不断启发学生的创新兴趣. 观察、实验等活动可以启发人们发现新事物, 但是创新需要在此基础上的科学地思考、论证, 这就需要逻辑思维. “看一看”、“量一量”、“做一做”等活动在学习几何的初级阶段(实验几何)可以发挥重要作用. 数学实验会在启发诱导、化难为易、检验猜想等方面进一步大显身手, 但是数学实验总归是数学学习的辅助手段, 数学毕竟不是实验科学, 不认识几何学的逻辑性, 只能认识一些关于图形的零散表象, 而不能认识几何学在图形背后蕴涵的科学思维方法的实质.

围绕这一发言, 大家对几何教学进行了更深入的思考. 实验操作发现几何知识, 算不算发现真理? 是证明的一种吗? 到了论证几何阶段, 是否要把实验几何的结论, 统统推倒重来? 我们可不可以相信自己的眼睛(直观)? 因此, 说理、证实、证明的意义需要进一步明确. 这是一个大课题. 期望今后列为专题进行研讨.

这次研讨班的成果, 包括今后征集的有关稿件, 将由上海教育出版社出版, 书名暂定为《中国数学双基教学的理论与实践》.

高研班闭幕式上, 大家对负责会务工作的周克依、龙开奋等同志表示深切的感谢.

数学日记的设计与实践

250100 山东省济南市历城区教研室 谢兆水

日记原本是语文教学中常见的作业方式. 数学日记的实践则给学生提供了用数学的语言或者自己的语言表达数学的思想、方法和情感的机会, 还可以将数学日记作为评价自己或者自我反思的策略, 记录自己在数学学习、探究等方面的足迹, 形成一个展示自我数学成长的报告. 长期以来, 我坚持请学生写数学日记, 大概涉及到了下面一些内容.

1. 数学故事: 4月19日《哥德巴赫猜想》

上周, 我们学习了《质数与合数》, 老师在课上提到了哥德巴赫猜想, 提到了数学家陈景润. 我很好奇, 于是查了一些资料. 下面就是我搜集到的关于哥德巴赫猜想的故事. "德国数学家哥德巴赫在给大数学家欧拉的一封信中提出了著名的哥德巴赫猜想, 内容是: 每一个大于4的偶数都是两个质数的和. 如: $6=3+3$, $8=3+5$, $10=3+7,\cdots$. 哥德巴赫猜想一经提出, 就引起了众多著名数学家的研究兴趣, 虽然得到了一些越来越接近最后结果的研究成果, 但在世界范围内仍然没有人能够给予严格的证明. 目前最好的结果 $(1+2)$ 是由我国数学家陈景润在1973年证明的. "我由此想到: 我们在课内、课外也经常会有一些离奇的猜想, 应该把它们记录下来, 给老师看一下, 说不定也有一些研究的价值呢! 同时, 我也为我们中国有像陈景润这样的数学家而感到骄傲和自豪. 相信我们中国人在世界的每一个研究领域都可以做到最好!

2. 数学问题: 3月11日《交换律的猜想》

今天, 我们学习了《加法的交换律》.

我忽然有个想法:"减法、乘法和除法也都有自己的交换律吗?" 我决定试一下. 加法的交换律是: 两个数相加, 交换加数的位置, 它们的和不变; 并且可以用字母式子 $a+b=b+a$ 表示. 我猜想如果减法、乘法和除法也都有自己的交换律, 那也许应该说成是"两个数相减, 交换被减数和减数的位置, 它们的差不变; 并且可以用字母式子 $a-b=b-a$ 表示." "两个数相乘, 交换因数的位置, 它们的积不变; 并且可以用字母式子 $a\times b=b\times a$ 表示." "两个数相除, 交换被除数和除数的位置, 它们的商不变; 并且可以用字母式子 $a\div b=b\div a$ 表示." 等我自己写出来, 我就立即断定: 减法和除法应该都没有相应的交换律; 乘法很有可能有相应的交换律, 值得试一下. 我随便写出了几组乘法算式, 按我的猜想进行了实验: $3\times5=5\times3$, $100\times3=3\times100$, $50\times2=2\times50$, $15\times4=4\times15$. 我断定: 像这样继续写下去, 算式依然会成立. 看来, 我已经证明了乘法交换律的存在. 明天我要交给数学老师看一下, 他会不会表扬我呢? 我想应该会!

高兴之余, 我决定继续实验. 我随意写下几个减法算式: $15-3-2=15-2-3$, $20-8-9=20-9-8$, $100-20-30=100-30-20$. 我由此同样断定: 像这样继续写下去, 算式依然会成立. 天哪! 这算不算证明了减法交换律的存在呢? 而且按照这样的实验, 除法也会有类似的交换律.

这是数学猜想呢, 还是胡思乱想呢? 唉! 还是明天一块交给数学老师批阅吧!

3. 数学感悟: 4月1日《神奇的绳子》

今天, 数学老师给我们介绍了我国著名的数学家华罗庚说过的一句话: "宇宙之大, 粒子之微, 火箭之速, 化工之巧, 地球之变, 生物之谜, 日用之繁, 无处不用数学." 并且以一根绳子为例对周围事物和现象中隐含的数学进行

了解释: 这根绳子可以用来解决什么数学问题呢? 可以帮助测量圆形物体的周长, 进而还帮助计算直径或者半径; 可以围成我们研究过的任意一种平面图形(包括线段、角、三角形、平行四边形、梯形、圆、扇形、轴对称图形等), 帮助我们探究周长与面积的规律; 可以帮助画出直径很长的圆; 可以表示出若干分数……或许, 还能用来解决更多样的数学问题.

我在之前还真没有想到一根绳子可以在数学上有那么大的应用价值. 我决定试着找一下, 看这根绳子是否还有可用之处. 经过我的苦思冥想, 就绳子可以表示出若干分数的启发还真的又发现了几处: 分数除以整数时可以用作学具帮助理解; 可以将绳子平均分成若干份, 然后写比, 或者任意分成两份, 写出长度的比再化简; 用不同的长度单位表示绳子的长, 再改写成小数, 可以证明小数的性质.

我越来越相信数学真的就在每个人的日常生活中. 我真的应该睁大眼睛看世界了!

4. 课堂趣录: 5月11日《母亲节的喜与忧》

下面是我昨天的日记:"5月9日是母亲节, 我在几天前就在准备给母亲的礼物, 但不巧的是我的母亲出差了. 昨天数学老师布置的作业是调查自己母亲的最喜爱的食品、颜色、游乐项目等五项内容, 然后以小组为单位绘制统计表和统计图. 我决定打电话询问母亲, 可父亲鼓励我凭借自己对母亲的了解先猜想自己母亲的最爱, 然后完成作业. 我对自己母亲的了解颇为自负, 就凭猜想先做完了作业. 可是, 我一直不太安心, 终于我还是拨通了母亲的电话. 我故意隐瞒了这是作业的调查内容, 很随意的询问了母亲在五个方面的最爱. 我放下电话一一对照, 对照的结果令我自己感到惊讶和惭愧, 我对自己的母亲竟然是如此地不熟悉: 我的猜想与母亲真正的最爱在五个方面竟然有四个是不同的. 在那一瞬间, 我的心底忽地涌起一腔愧意, 妈妈是这样的疼我爱我, 我却竟然连妈妈最喜欢的食品都不知道. 如果是让妈妈做同一个调查, 我敢打赌:百分之百的妈妈都会猜准, 只因为孩子的每时每刻、每丝每毫都装在每一位母亲的心里. 但又有多少孩子在安心地享受母亲给予的幸福时, 想一下自己母亲的需要呢? 我在这一刻好象忽然长大了, 我也知道在今天、在明天我应该做些什么! 是这次数学调查给了我这样一次走近母亲的机会, 我也应该感谢数学老师."

老师在课堂上念我的这篇日记, 刚开始的时候我还有点不好意思. 我就低头听着, 越来越感觉到老师语气的变化, 到后来老师竟然哽咽着读不下去了. 后来, 老师说:"我读这篇日记, 是因为它让我想到了我的母亲. 读这篇日记更是为了让每一位同学都从小事做起, 多关心自己的母亲……"老师还让其他同学谈了自己的想法. 我从没想到数学老师也能在读文章时充满情感, 也从没想过数学老师也能讲述班主任老师才能讲述的话. 同学们都说, 这不是数学课. 但这一切都是因为一份数学作业而来. 感谢这样的作业, 也谢谢我的数学老师!

5. 数学人物: 4月30日《19世纪数学家最后的巅峰》

我对高斯的认识源于一个著名的求$1+2+3+4+5+\cdots+100=?$的速算故事. 高斯出生于德国的一个贫苦家庭, 从小就对一切现象和事物十分好奇, 而且决心弄个水落石出. 19岁那年, 他已做出了许多伟大的数学成就. 1792年, 高斯进入卡罗琳学院继续学习, 由此开始了真正的数学研究. 1795年, 进入德国著名的哥丁根大学, 使得他得以按照自己的理想, 勤奋地学习和开始进行创造性的数学研究. 1799年, 年仅22岁的高斯被授予博士学位. 由于高斯在天文学、数学方面的杰出工作, 他的名声从25岁起就已开始传遍欧洲. 高斯的学术地位, 历来为人们推崇得很高. 他有"数学王子"、"数学家之王"的美称, 被认为是人类有史以来"最伟大的三位(或四位)数学家之一"(阿基米德、牛顿、高斯或加上欧拉). 高斯的研究领域, 遍及纯粹数学和应用数学的各个领域, 并且开辟了许多新的数学领域, 从最抽象的代数数论到几何学, 都留下了他的足迹. 如果我们把18世

纪的数学家想象为一系列的高山峻岭, 那么最后一个令人肃然起敬的巅峰就是高斯; 如果把19世纪的数学家想象为一条条江河, 那么其源头就是高斯. 对这样的大人物, 我不知该怎样表达我的仰慕, 但我知道中国也有著名的数学家, 在将来还需要有更多的世界闻名的数学家.

6.数学游戏: 5月8日《九宫格游戏》

老师在数学课外活动中给我们介绍了中国古代著名的《九宫格》, 并说自古代以来一直是一个神秘而著名的游戏. 于是, 我设计了以下几种玩法:

(1) 中、高年级学生: 可以用1～9之类的9个相邻的数玩填数游戏, 使横、竖、斜每一行的三个数之和都相等; 可以利用九宫格图组织玩丢沙包游戏, 每人投掷两次, 用格中的两个数组分数、求倒数、组比及比例或者判断一个是否是另一个的约数(或倍数); 可以利用九宫格图数其中的正方形、长方形个数等.

(2) 低年级学生: 可以为他们提供完整的九宫格图, 请他们探寻其中的填数规律, 也可以组织玩丢沙包游戏, 每人投掷两次, 求两个数的和、差、积或者商. 还可以配上一个正方体(每一个面上都标上数), 配合玩上面的游戏.

九宫格作为我们国家著名的数学文化遗产, 应该让更多的学生知道她、喜欢她, 游戏可能是一种很好的认识方式.

7.与数学教师的话: 9月15日《暖心的奖赏》

我不是一个让老师喜欢的学生, 因为我自己感觉我没有多少学好数学的天赋. 虽然, 老师从一开学就宣布本学期开始要设立"问题发现奖"、"合作奖"、"应用奖"、"仿创奖"、"资料奖"、"研究小论文奖"等十几个奖励种类, 但我一直也没放在心上, 因为我觉得获奖是离我很远的一件事.

令我感到意外的事发生了: 老师竟然在今天课上奖励我了, 其原因也只是我在作业中用到了画图的方法. 老师表扬我用了独特的方法, 为我颁发了"解题创意奖". 颁奖时, 我很不好意思. 因为我清楚: 这次在作业中用画图的方法是我偷懒的一招, 绝没有想过会误打误撞地被老师表扬到. 不过,我还是非常感谢老师给了我这个奖, 这说明我至少是在这一次作业中的想法还是有一些独特之处. 爸爸、妈妈也很久没有为我的学习而高兴过了, 晚饭时, 妈妈竟然为我做了我最喜欢的菜. 或许, 我应该多得几次奖. 我也相信: 通过努力, 我可以得到其他的奖. 这次的奖励应该是我新的起点, 谢谢老师!

8.数学实践: 5月14日《绘图工具设计》

其实, 画垂线、平行线以及判断一条直线是不是已知直线的垂线或平行线并不是很困难的事, 但同学们都感到很麻烦, 需要准备的工具比较多, 而且操作不是很方便. 因此, 我找到几个好朋友想共同设计一种实用的工具, 同学们都说我的这个想法好.

我们首先研究了垂线、平行线的特点. 一开始, 认为只要能够确保有直角和已经平行的线段即可, 设计成了一个长方形工具图. 但是, 在使用过程中, 感到还不是很方便, 于是做了改进, 设计出了改进版, 按形状我们称为工字图. 使用该工具, 画垂线很好用, 但只能画出固定距离的平行线, 作用仍然有限, 于是我们又做了改进: 在确保直角的前提下, 将两条相平行的边设计成可以移动的, 称为土字图(上面一横可以移动). 这样就好用多了, 而且可以很好地利用它来判断一条直线是不是已知直线的垂线或平行线. 我和小伙伴们都对我们的发明感到满意.

通过这次设计, 我认为不应该小瞧自己, 更应该和小伙伴们合作. 我们完全有能力用我们自己的智慧改进我们的学习和生活.

数学日记已经成为"培养学生的创新精神和实践能力"、"培养学生收集处理信息的能力、获取新知识的能力、分析和解决问题的能力、团结协作和社会活动能力"的必要途径; 已经成为影响学生形成对学习的积极的情感、态度的重要因素; 更已经成为更多学生以更适合自己的方式展示自我、体验成功的载体.

分类讨论教学三步曲

200065 上海市甘泉外国语中学 胡 辉

学生在最初接触分类讨论问题时常感到非常迷茫, 因为这需要一种发散的思维, 与此前贯用的一条线思维方式大不相同, 也正是因为发散, 所以才没有方向. 此外, 需要运用分类讨论的方法去解决的问题往往具有一定的综合性, 这就使得学生感到这个方法的学习和掌握更加困难.

本文设计了一个分类讨论攻关三步曲, 使教学程式化, 为突破分类讨论这一知识难点作一些尝试性的探讨.

一、运用已有知识分析分类讨论的原因

教学的第一阶段是利用一组简单问题, 引导学生进行分类讨论. 通过启发与讨论, 使得学生明白, 每一问题引发分类讨论的原因是各不相同的, 并使学生认识分类讨论的必要性. 教学中, 关于原因的分类可以由学生讨论完成, 教师帮助总结, 使学生对于自己总结的问题类型及方法产生成功感, 从而激发他们学习的积极性.

1. 由概念引起的分类讨论, 主要是含有绝对值的分类讨论, 例如:

① 解方程 $|\log_2 2x^2|-|\log_2 x|-2=0$;

② 解不等式 $2^x+2^{|x|}\geqslant 2\sqrt{2}$;

③ 已知数列 $\{a_n\}$ 的一般项 $a_n=100-6n(n\in\mathbf{N})$, 而 $S_n=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$, 求 S_n.

2. 运用数学的定理、性质、法则、公式处理含参问题而引起的分类讨论, 常见的有:

(1) 根据参数的变化, 确定函数的性质. 例如:

① 求二次函数 $f(x)=2x^2-2ax+3$ 在 $[-1,5]$ 的最小值;

② 求函数 $y=A\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$ 的单调区间.

(2) 根据函数的性质, 确定参数的变化范围. 例如:

① 若函数 $y=\log_a(ax^2+x+a)\,(a>0,a\neq 1)$ 的定义域是 $\mathbf{R}$, 确定 a 的取值范围以及函数的值域;

② 设当 $x>1$ 时, 恒有 $f(x)=2a^{2x}-5a^x+2>0$, 求 a 的取值范围.

(3) 一元二次方程根的判别. 例如:

设实系数方程 $2x^2+3ax+a^2-a=0$ 至少有一根的模等于 1, 求 a 的值.

(4) 参数变化导致曲线的性质或类型发生改变. 例如:

① 求双曲线 $4(1-m)x^2+3(1+m)y^2=1$ 的焦点坐标;

② 方程 $x^2+\sin a\cdot y^2=1$ 所确定的是什么曲线?

3. 含有参数的计算问题所引起的分类讨论. 例如:

① 计算 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)^n$ $(n\in\mathbf{N})$ 的值;

② 已知集合 $A=\{x|x^2-(2a+1)x+(a+2)(a-1)\geqslant 0\}$, $B=\{x|x^2-a(a+1)x+a^3<0\}$. 若 $A\cap B=\varnothing$, 确定 a 的取值范围;

③ 已知 $ABCD$ 为矩形, 各顶点坐标为 $A(0,0)$、$B(1,t)$、$C(1-2t,2+t)$、$D(-2t,2)$, 且 $t>0$, 求矩形 $ABCD$ 在第一象限的面积 $g(t)$.

二、深入理解, 重视训练

在第二阶段的教学中, 我们从分类的角度、分类的层次及知识的综合运用等方面帮助学生做深入细致的分析, 在原有对分类讨论认识的基础上, 分层递进, 逐步深化学生对分类讨论

技能的感受. 通过对例题的分析, 合理设问, 帮助学生归纳总结分类讨论的一般步骤.

例1　已知函数$f(x)=-4x^2+4ax-a-a^2$在区间$[-1,1]$上有最大值2, 求a的值.

设问:

设问1 这里参数a的不同取值会影响二次函数的什么?

设问2 对参数a的讨论应以什么为原则?

解: 参数a的变化导致二次函数的对称轴$x=\frac{a}{2}$变化, 因此, 函数的最大值将随参数a的变化而改变. 可见, 必须对参数a进行讨论. 讨论当$\frac{a}{2}$分别落在三个不同区间$(-\infty,-1)$、$[-1,1]$、$(1,+\infty)$时, 函数的最大值与a的关系.

因为$f(x)=-4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-a$, 所以该二次函数的对称轴为$x=\frac{a}{2}$. 分类讨论如下:

Ⅰ. 当$\frac{a}{2}\in(-\infty,-1)$时, $a\in(-\infty,-2)$, $f(x)_{\max}=f(-1)=-a^2-5a-4=2$, 解得$a=-2$(舍去)或$a=-3$;

Ⅱ. 当$\frac{a}{2}\in[-1,+1]$时, $a\in[-2,2]$,

$f(x)_{\max}=f\left(\frac{a}{2}\right)=-a=2$, 解得$a=-2$;

Ⅲ. 当$\frac{a}{2}\in(1,+\infty)$时, $a\in(2,+\infty)$,

$f(x)=-4\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-a<-2$, 无解.

综上所述, 当$a=-2$或$a=-3$时, 函数$f(x)=-4x^2+4ax-a-a^2$在区间$[-1,1]$内有最大值2.

例2　求函数$f(x)=ax^2-2x+1$, $x\in[-1,3]$的最大值.

设问:

设问1 本题中的函数一定是二次函数吗?

设问2 参数a的取值会对函数造成什么影响?

设问3 对参数a的讨论应以什么为原则?

设问4 讨论应分哪几个层次进行?

解: 首先, 参数a会影响函数的种类: 当$a=0$时是一次函数; 当$a\neq0$时是二次函数. 其次, 参数a影响函数的性质. 因此, 在对a进行分类讨论时要按函数的种类以及函数的性质逐级分类.

Ⅰ. 当$a=0$时, 函数为$f(x)=-2x+1$, 是一次单调递减函数, 所以$f(x)_{\max}=f(-1)=3$.

Ⅱ. 当$a\neq0$时, $f(x)=a\left(x-\frac{1}{a}\right)^2+1-\frac{1}{a}$, 其对称轴为$x=\frac{1}{a}$. 进一步分类讨论如下:

(1) 当$a>0$时, $\frac{1}{a}>0$. 此时,

如果$1\geqslant\frac{1}{a}>0$, 则$a\geqslant1$, $f(x)_{\max}=f(3)=9a-5$;

如果$\frac{1}{a}>1$, 则$0<a<1$, $f(x)_{\max}=f(-1)=a+3$.

(2) 当$a<0$时, $\frac{1}{a}<0$. 此时,

如果$0>\frac{1}{a}\geqslant-1$, 则$a\leqslant-1$, $f(x)_{\max}=f\left(\frac{1}{a}\right)=1-\frac{1}{a}$;

如果$\frac{1}{a}<-1$, 则$0>a>-1$, $f(x)_{\max}=f(-1)=a+3$.

综上所述

$$f(x)_{\max}=\begin{cases}1-\frac{1}{a},\ a\in(-\infty,-1],\\ a+3,\ a\in(-1,1),\\ 9a-5,\ a\in[1,+\infty).\end{cases}$$

在完成上述两个问题的解答后, 及时归纳总结分类讨论的步骤要求:

1. 确定讨论的对象及其取值范围;

2. 正确地分类, 做到层次分明, 不重、不漏, 不互相嵌套;

3. 整合讨论结果, 做好最后陈述.

下面的例3是一个需要采用分类讨论、数形结合等综合方法解决的问题.

例3　已知a是非零实数, 求双曲线$x^2-y^2=a$与圆$(x-a)^2+y^2=a^2$的公共点的个数.

设问:

设问1 本题中参数a的取值会对两条曲线造成什么影响?

设问2 进一步考虑不同曲线的图形会对公共点个数有什么影响?

设问3 对参数a的讨论应以什么为原则?

设问4 讨论应分哪几个层次进行?

解: 参数a的符号不仅影响双曲线的焦点位置, 还影响圆心的位置, 因此可以从讨论a的正负入手.

Ⅰ. 当$a>0$时, 双曲线$x^2-y^2=a$的焦点在x轴上, 顶点为$(-\sqrt{a},0)$、$(\sqrt{a},0)$, 圆在y轴的右侧, 如图1所示. 分类讨论如下:

(1) 当$\sqrt{a}=2a$即$a=\frac{1}{4}$时, 双曲线与圆只有一个公共点;

(2) 当$\sqrt{a}>2a$即$0<a<\frac{1}{4}$时, 双曲线与圆没有公共点;

(3) 当$\sqrt{a}<2a$即$a>\frac{1}{4}$时, 双曲线与圆有两个公共点.

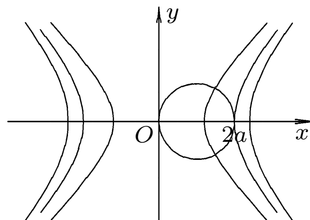


图 1

Ⅱ. 当$a<0$时, 双曲线$x^2-y^2=a$的焦点在y轴上, 顶点为$(0,-\sqrt{-a})$、$(0,\sqrt{-a})$, 圆在y轴的左侧, 如图2所示. 列方程组

$$\begin{cases} x^2-y^2=a, \\ (x-a)^2+y^2=a^2. \end{cases} \quad ①$$

消去y得 $2x^2-2ax-a=0$, ②

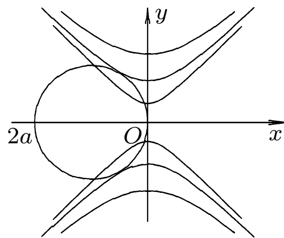


图 2

设函数$f(x)=2x^2-2ax-a$, $x\in[2a,0]$. 由于$f(x)=2\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{2}-a$, 所以该二次函数的对称轴为$x=\frac{a}{2}$且$2a<\frac{a}{2}<0$, $f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{2}-a$. 分类讨论如下:

(1) 当$-\frac{a^2}{2}-a>0$, 即$-2<a<0$时, 方程 ② 无解, 两曲线无公共点;

(2) 当$-\frac{a^2}{2}-a=0$, 即$a=-2$时, 方程 ② 有一个解, 方程组 ① 有两个解, 两曲线有两个公共点;

(3) 当$-\frac{a^2}{2}-a<0$, 即$a<-2$时, 方程 ② 有两个解, 方程组 ① 有四个解, 两曲线有四个公共点.

综上所述, 当$a\in(-\infty,-2)$时, 两曲线有四个公共点; 当$a\in\{-2\}\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$时, 两曲线有两个公共点; 当$a=\frac{1}{4}$时, 两曲线有一个公共点; 当$a\in(-2,0)\cup\left(0,\frac{1}{4}\right)$时, 两曲线没有公共点.

通过本阶段的教学, 不光要使学生掌握分类讨论的技能, 还要培养学生敢于面对困难的勇气以及学会解决困难问题的方法.

三、反思与升华

在第三阶段的教学中, 还要使学生认识到, 并不是所有上述问题都必须用分类讨论的方法来求解, 有时我们可以运用适当的恒等变形、换元、消去参数、数形结合等方法来简化分类讨论的过程, 甚至避免分类讨论.

1. 通过恒等变形来回避分类讨论

例4 已知a、b、c是实数, 函数$f(x)=ax^2+bx+c$, $g(x)=ax+b$, 当$-1\leqslant x\leqslant 1$时, $|f(x)|\leqslant 1$, 证明:当$-1\leqslant x\leqslant 1$时, $|g(x)|\leqslant 2$.

解一: 可以按$a=0$与$a\neq 0$两种情况进行分类讨论. 由于

$f(1)=a+b+c$, $f(-1)=a-b+c$, $f(0)=c$,

所以 $|a+b+c|\leqslant 1$, $|a-b+c|\leqslant 1$, $|c|\leqslant 1$, 推得

$|a+b|\leqslant 2$且$|-a+b|\leqslant 2$, $|b|\leqslant 2$. (*)

分类讨论如下:

Ⅰ. 当$a=0$时, $g(x)=b$, $|g(x)|=|b|\leqslant 2$.

Ⅱ.当$a\neq 0$时, $g(x)=ax+b$是一次函数. 因此当$-1\leqslant x\leqslant 1$时, $|g(x)|$的最大值应当为$|a+b|$或者$|-a+b|$, 由不等式$(*)$得$|g(x)|\leqslant 2$.

本例还可通过恒等变形来回避分类讨论:

解二: 通过分析函数$f(x)$和$g(x)$的表达式, 注意到$x=\dfrac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4}$, 得 $g(x)$

$$=a\frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{4}+b\left(\frac{x+1}{2}-\frac{x-1}{2}\right)$$

$$=f\left(\frac{x+1}{2}\right)-f\left(\frac{x-1}{2}\right),$$

由于$-1\leqslant x\leqslant 1$, 因此$0\leqslant\dfrac{x+1}{2}\leqslant 1$, $-1\leqslant\dfrac{x-1}{2}\leqslant 0$, 故$\left|f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right|\leqslant 1$, 且$\left|f\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\right|\leqslant 1$, 所以 $|g(x)|\leqslant\left|f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)\right|+\left|f\left(\dfrac{x-1}{2}\right)\right|=2$.

2.数形结合可以简化或回避分类讨论

例5 已知$a>0$, 解关于x的不等式$x-1<\sqrt{a^2-x^2}$.

解:如果设函数$y_1=x-1$, $y_2=\sqrt{a^2-x^2}$, 则可将问题转化为求x的值使得函数$y_1=x-1$的图形在曲线$y_2=\sqrt{a^2-x^2}$的下方. 结合图3分类讨论如下:

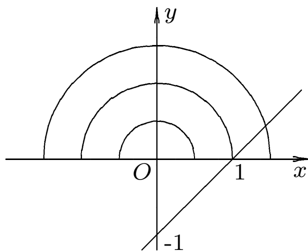


图 3

Ⅰ.当$0<a<1$时, 只要$-a\leqslant x\leqslant a$, 恒有$y_1<y_2$;

Ⅱ.当$a>1$时, 解方程组$\begin{cases}y=x-1\\ y=\sqrt{a^2-x^2}\end{cases}$

得 $x_1=\dfrac{1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$, $x_2=\dfrac{1-\sqrt{2a^2-1}}{2}$ (舍),

所求x满足$-a\leqslant x<\dfrac{1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$;

Ⅲ.当$a=1$时, 易得$-1\leqslant x<1$,

综上所述, 不等式的解为:当$1>a>0$时, $-a\leqslant x\leqslant a$; 当$a\geqslant 1$时, $-a\leqslant x<\dfrac{1+\sqrt{2a^2-1}}{2}$.

3.消参数来回避分类讨论

例6 设$0<x<1$, $a>0$且$a\neq 1$, 试比较$|\log_a(1-x)|$与$|\log_a(1+x)|$的大小.

解: 因为$0<x<1$, 所以$0<1-x<\dfrac{1}{1+x}<1$, $1+x>1$, 因此

$$\log_{(1+x)}(1-x)<\log_{(1+x)}\frac{1}{1+x}=-1.$$

又因为$|\log_a(1-x)|>0$, $|\log_a(1+x)|>0$, 故

$$\frac{|\log_a(1-x)|}{|\log_a(1+x)|}=|\log_{(1+x)}(1-x)|>1,$$

因此$|\log_a(1-x)|>|\log_a(1+x)|$.

在这一阶段的教学中,我们采用一题多解,对比不同的解法分析它们之间的优劣,使学生正确认识分类讨论的作用与功能,并进一步理解不是所有可以用分类讨论解决的问题只能用分类讨论来解决. 应该辩证地使用各种方法来正确地解题,并尽量使解答过程简略、明了. 通过对比,引发各种思想的碰撞,升华经验,对于提高学生的学习能力起到画龙点睛的作用.

(上接第2–36页)

当然,由于这一举措只能影响少量学生,即使考虑到模拟考试会扩大影响到的人数,估计也不会多于30%, 因此, 前面提到的对学生和对教学的良好促进作用是有限度的. 同时, 这样的举措也有可能产生预想不到的不良结果, 例如, 部分考生没有进行恰当的自我评价, 盲目去做附加题, 对正常答题造成了干扰. 对此, 可以通过《考试说明》进行预先通告, 教师可以通过适应性训练让学生及早适应. 考虑到初三复习时教师会在模拟考试模拟这种做法, 因此将有超过20%的学生会感受这样的举措, 相信经过几次模拟考试, 绝大部分学生会找准自己的定位, 掌握应对的方法.

一堂关于对称的探究课实录

223900 江苏省泗洪楚天外国语学校 朱永厂

在教学过程中, 当学生萌发不同于教师和课本的创新想法时, 当学生的思路和见解与教学设计发生偏差时, 我们是将他硬拉回来还是顺水推舟去开发其中的潜能和价值呢?

一次, 在"点到直线的距离"的新授课上, 学生1向我提出了这样的问题: "关于点到直线的距离的求法, 课本上说, 一种是先求出交点, 再转化为两点间距离求解, 较繁; 另一种是利用等面积法, 我认为也比较繁. 我有一个新的想法, 先求出点P的对称点, 然后, 再求出其距离的一半即可. 但是, 我不会求对称点, 你能告诉我吗?"

如果直接求点$P(x_0,y_0)$关于$Ax+By+C=0$的对称点的话, 可能学生感觉难度太大, 并且学生提出问题的能力很难得到锻炼, 何不让学生自己从特殊到一般去观察、归纳、猜想和证明呢?

教师: 很好, 想法独特、新颖, 那么同学们会求以下问题吗?

探究1　求点$P(x_0,y_0)$关于直线$x-y=0$对称点P'.

学生2: 由反函数的性质和图象易知$P'(y_0,x_0)$.

教师: 正确. 请同学们充分利用发散思维, 由此来发现、提出并解决问题.

此时全班同学处于紧张思维状态.

学生3: 老师, $P(x_0,y_0)$关于直线$x+y=0$的对称点是否为$P'(-y_0,x_0)$?

老师面含微笑, 打手势示意同学们自己检验学生3的答案是否正确.

学生4: 对称点不应为$P'(-y_0,x_0)$, 应为$P'(-y_0,-x_0)$, 我是利用PP'中点在直线$x+y=0$上和PP'的斜率与直线$x+y=0$的斜率互为负倒数两个条件求出来的.

全班同学点头表示同意, 老师也高兴地在黑板上板书:

探究2　点$P(x_0,y_0)$关于直线$x+y=0$的对称点为$P'(-y_0,-x_0)$.

学生5: (一位同学高兴地站起来) 我从学生2和学生4的结论得出求对称点的一种新方法: 把直线方程中的x解出来, 如学生4的问题由直线$x+y=0$得$x=-y$, 用$-y$代换x, 同理用$-x$代换y即可得出对称点$\cdots\cdots$.

学生6: 老师, 如果我推理没有错的话, 点$P(x_0,y_0)$关于直线$x+y+C=0$对称的点为$P'(-y_0-C,-x_0-C)$.

学生7: 根据学生5的方法, 点$P(x_0,y_0)$关于直线$x-y+C=0$对称的点为$P'(y_0-C,x_0+C)$, 老师, 不知对不对?

教师: 对不对, 不要问老师, 应该问问你们自己, 同学们该怎么办?

全班立即处于紧张的运算状态, 一分半钟以后, 全班同学齐声说正确, 于是老师微笑着在黑板上板书:

探究3　点$P(x_0,y_0)$关于直线$x+y+C=0$的对称点为$P'(-y_0-C,-x_0-C)$.

探究4　点$P(x_0,y_0)$关于直线$x-y+C=0$的对称点为$P'(y_0-C,x_0+C)$.

老师板书还未结束, 学生8要求起来发言.

学生8: 点$P(x_0,y_0)$关于直线$Ax+By+C=0$的对称点应为

$$P'\left(-\frac{By_0+C}{A},-\frac{Ax_0+C}{B}\right),$$

一定为这一点?!

教师: 数学结论要有理有据, 不经过严密的逻辑推理、验证运算和证明, 我们不能下结论, 下面你们知道怎么做了吧?!

三阶行列式按行(列)展开教学案例

200023 上海市卢湾高级中学 阮瑾怡

通读高中二年级第一学期数学课本(上海教育出版社)全书, 可以发现书中第九章只是简单介绍了二阶、三阶行列式的概念, 展开法则及二元、三元线性方程组解的讨论. 在其后各章, 行列式只是作为一种特殊的记号出现, 全书对行列式的性质并未作深入的讨论与研究. 从书中内容的安排, 可以发现在内容上是"点到为止", 为什么要"点", 又为什么在此"止"住, 我的理解是这些内容是学生今后学习所必需的数学基本知识, 将学生引进这个门, 如果学生有进一步需要, 他会自行学下去, 如果没有更多的兴趣, 这些基本知识也已够用了. 这样的中学数学课程就体现了基础性和发展性要求. 随着现代技术的发展, 行列式的计算可由计算机代劳.

从内容上来看, 在这一章概念性的知识是比较多的. 在教学时很容易犯下"照本宣科"的弊病, 单纯地让学生记住那些硬性规定的法则,

~~~~~~

一分半钟以后, 一学生试着举起了手.

学生9: 学生8的结论不正确, 不满足学生5所说的规律, 我用学生4的方法解, 得到的对称点应为: $P'\left(x_0-\dfrac{2A(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2},\ y_0-\dfrac{2B(Ax_0+By_0+C)}{A^2+B^2}\right)$.

其他好几个同学也表示赞同. 又过一分钟以后, 全班同学都同意学生9的结论了.

学生10: 老师, 从以上得到的结论看, 只有斜率为±1的直线, 才满足学生5所说的规律.

教师: 同学们, 你们说对吗?

全班学生齐声高呼: "对", 我也点点头同意他们的看法. 本来想, 到学生10问题为止, 就回到"点到直线的距离公式"上, 可没想到学生一想就不可收拾了, 又提出了新的问题.

学生11: 老师, 既然点关于直线对称有以上规律, 而曲线又是点的集合, 也应有以上性质, 不知对吗?

在下课铃和同学们的欢呼声中, 我再一次在黑板上板书出了新的结论:

结论1 曲线$y=f(x)$关于直线$x+y=0$对称的曲线为: $x=-f(-y)$.

结论2 曲线$y=f(x)$关于直线$x+y+C=0$对称的曲线为: $-x-C=f[-(y+C)]$.

结论3 曲线$y=f(x)$关于直线$x-y+C=0$对称的曲线为: $x+C=f(y-C)$.

结论4 曲线$y=f(x)$关于直线$Ax+By+C=0$对称的曲线为: $x-\dfrac{2A(Ax+By+C)}{A^2+B^2}=f\left[y-\dfrac{2B(Ax+By+C)}{A^2+B^2}\right]$.

以下是几个关键点的评注:

从学生1提出的问题可以看出, 同学们的思维具有一定的发散性和创造性, 同时, 从同学们一双双眼神中, 能够看出他们是多么想知道这一求法, 如果此时老师不予以解决的话, 学生将是非常失望, 注意力也会很难转移到课本上来. 于是, 我就顺水推舟, 使这节课的中心转移了.

学生5尽管语言表达得不是很准确, 但他敏锐的观察力和概括力, 足以使大家信服, 同时, 他也为学生8误入陷阱埋下了伏笔. 在学生6和学生7得出探究3和探究4之后, 同学们的学习激情处于异常兴奋的状态, 这样既调动了学生的学习积极性, 又培养了学生的观察、推理和运算能力, 同时也教会了学生怎样提出问题和解决问题.
~~~~~~

会使得学生对数学学习失去兴趣. 我的做法是将“记住法则”的教学要求减弱而加强“理解法则”. 下面是“三阶行列式按一行(或一列)展开”的一节课堂实录:

师: 上节课我们讲了三阶行列式的对角线展开法则, 现在请同学们将$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$按对角线法则展开.

生: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_2b_1c_3 - a_1b_3c_2.$ (1)

师: 如果我把(1)式中含有元素a_1、a_2、a_3的项分别合并, 然后提取出元素a_1、a_2、a_3可得到

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1). \quad (2)$$

请同学们观察一下(2)式中括号内的式子有什么特点, 能否用二阶行列式来表示?

生: $b_2c_3 - b_3c_2 = \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, (3)

$b_1c_3 - b_3c_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, (4)

$b_1c_2 - b_2c_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$. (5)

师: 这样 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

其中(3)、(4)、(5)分别叫做元素a_1、a_2、a_3的余子式, 添上相应的符号后称为代数余子式. 于是三阶行列式就可表示为第一列的元素与其对应的代数余子式乘积的和.

同样, 三阶行列式也可按第一行的元素展开. 这样, 三阶行列式可以按任一行(或一列)展开成该行(或该列)元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

请同学们回顾一下上述内容, 设想一下在实际操作时可能遇到的问题.

生1: 如果我在(2)式中提取的元素是a_2、b_2、c_2, 那么元素a_2、b_2、c_2的代数余子式的符号又该如何确定呢?

师: 这个问题提的非常好, 你猜想一下可能的结果吧.

生1: 因为前面按第一行或第一列展开时, 都是中间一个元素的代数余子式的符号为负, 所以我猜想元素b_2的代数余子式的符号是负的.

师: 生1的猜想是否正确, 请同学们一起帮他验证一下, 并在验证的同时总结一下如何确定代数余子式的符号. 请同学们按学习小组进行讨论 (讨论约6分钟).

师: 现在请各小组先汇报一下组内的分工情况及得到的结论.

组1: 我们组讨论时生乙、生丙、生丁分别按第三行、第二列、第三列的元素进行上述操作, 结果发现生1的猜想是不对的, b_2的代数余子式的符号是正的, 至于如何确定代数余子式的符号我们没有讨论出结果.

师: 组1的分工合作进行得非常好, 对于b_2的代数余子式符号的判断也是正确的. 下面我们和其它小组分享一下如何确定代数余子式的符号问题.

组2: 我们小组研究后发现, 把三阶行列式中$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$边上的八个元素连起来可以构成一个正方形, 这个正方形的四个顶点及对角线交点上的五个元素的代数余子式的符号是正的, 其它元素的代数余子式的符号是负的.

组3: 其实组2的想法和我们是一样的, 不就是元素a_1、c_1、b_2、a_3、c_3的代数余子式的符号是正的, 元素b_1、a_2、c_2、b_3的代数余子式的符号是负.

组4: 我们是这样想的, 比如求c_2的代数余子式, 那就要划去c_2所在的行与列

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

这样剩下的四个元素如果是正方形的四个顶

点,那么该元素的代数余子式的符号就是正的,如果是长方形的四个顶点,那么该元素的代数余子式的符号就是负的.

组5:我们的结论是和元素所在的行数与列数有关,比如,b_3是第三行与第二列的元素,$3+2=5$是一个奇数,那它的代数余子式符号就是负的,如果行数和列数的和为偶数,那它的代数余子式符号就是正的.

师:太棒了.大家有这么多不同的做法,总结得非常好.通过刚才的分享,我们可以发现大家考虑问题的角度不同,判断的方法就不一样,有的同学是从形上着手,有的同学从数上考虑.

我们的讨论先暂时告一段落.请大家思考一下这个问题:为什么我们在学了按对角线法则展开三阶行列式后,还要学习按一行(或一列)展开三阶行列式呢?

(学生沉默).

师:按一行(或一列)展开后,原来的三阶行列式现在是用什么表示的?

生:二阶行列式.

师:好!那也就是说一个三阶行列式按这种方式展开总是可以转化为二阶行列式再展开.如果是一个四阶行列式,我们有没有相应的对角线法则?

全体学生:没有.

师:那我们猜想展开方法.

部分学生:可以先按一行或一列展开成三阶行列式,再展开成二阶行列式,最后完全展开.

师:如果行列式的行和列再多下去,可以是…….

全体学生:n阶行列式!

师:有办法展开吗?

全体学生:有!

师:太好了!这样我们就可以把一个复杂的n阶行列式逐步变成二阶行列式,并最终得到相应的展开式.也就是把一个复杂问题逐步转变为一个简单的、我们所熟悉的问题了.

当然了,现在也不需要我们用手去计算n阶行列式的展开式,有计算机可以为我们效劳,但是这种转化的思想却是解决复杂问题的基础.

好,现在让我们再回到前面讨论的问题上去.前面我们通过实际操作得到了每个元素对应的代数余子式的符号.现在大家对于三阶行列式各个元素的代数余子式的符号已经熟悉了.但是我们是否可以总结出一个对n阶行列式也适用,操作起来也比较简单的更一般的结论呢?

大家可以以组5结论为参考来猜想一下可能的结论.

生:如果一个元素所在的行数与所在的列数之和为奇数,那么该元素的代数余子式的符号为负的.如果一个元素所在的行数与所在的列数之和为偶数,那么该元素的代数余子式的符号为正的.

师:非常好.能不能用数学式子来表达呢?

(学生沉默).

师:大家可以回忆一下上学期我们学的数列的通项公式的写法.比如写出$1,-1,1,-1,\cdots$的一个通项公式,可以怎么写?

生:$(-1)^{n+1}$, $n\in\mathbf{N}$.

师:在这里如果我们设元素a_{ij}是第i行、第j列的元素,则它的代数余子式的符号是什么?

生:$(-1)^{i+j}$.

师:太棒了,这节课大家表现得都非常出色,下面请同学们自己看例2并完成练习(略).

课后分析:这节课学生始终保持着良好学习状态,思维也相当活跃,小组讨论时学生都能积极参与.因为小组讨论的可操作性很强,每个学生都有明确的任务,这样的小组讨论是高效率的.

课堂上仅花了6分钟的时间就得到了四种不同的方法,可以看到学生在讨论时碰撞出的思维的火花是耀眼的.同时学生也体会到了数学思想方法的重要性.

对于问题的引申,可以引起学生对进一步学习行列式的兴趣.

对分析应用题列方程规律的探索

443002　湖北省宜昌市第九中学　戴恩清

1990年, 为解决高等师范院校学生无教材问题, 原国家教委师范司委托华东师范大学出版社出版了权威的高等师范院校教材 ——《中学数学教材教法》, 在绪言中, 编者指出: 这是一门实践性强, 处于发展中的应用理论学科, 它的许多重大问题亟待人们去研究, 完成填补空白工作. 对于如何分析应用题列方程, 该教材认为这是一个重要课题. 由于初中数学内容大多属技能性的, 因此, 对这样一个典型的能力要求很高的问题, 教师难教、学生难学本来就较突出, 而权威的师范院校教材将其认定为重要课题, 无疑意味着人们对其规律还有再认识的必要. 为弄清这些问题, 从1986年至今, 笔者进行了长期探索, 现将有关看法作如下阐述.

一、解题举例

例1　甲、乙两站间的路程为450千米, 一列慢车从甲站开出, 每小时行驶65千米, 另一列快车从乙站开出, 每小时行驶85千米, 快车先开30分, 两车相向而行, 慢车行驶了多少小时两车相遇? [摘自人教版教材初中代数第一册(上) P.216 例3]

分析: 这是一个行程问题, 涉及到两个运动对象: 慢车与快车, 对于慢车(或快车), 从出发到相遇所涉及的行程、速度、时间三个量之间满足相等关系:

慢车行程 = 65× 慢车行驶时间.

将快车从最初出发到最后相遇看作一个完整的全过程, 则与上类似可得:

快车全部行程 = 85× 快车全部行驶时间.

根据题意对慢车行程、快车全部行程的关系进行分析, 易得:

慢车行程 + 快车全部行程 = 450.

根据题意对慢车行驶时间、快车全部行驶时间的关系进行分析, 易得:

慢车行驶时间 +0.5 = 快车全部行驶时间.

上述四个相等关系中共含有四个未知数, 即有“相等关系个数等于未知数个数”的特征, 利用数学关系映射反演方法可知,以上相等关系等价于:

$$\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(s,t)=0, \\ f_3(x,s)=0, \\ f_4(y,t)=0. \end{cases}$$

而后者在“互相独立的一次方程个数等于未知数个数”情况下就有确定的解又已被证实, 因此, 可将是否具备“相等关系个数等于未知数个数”的特征作为衡量相等关系找全与否的判别标准. 在找全了相等关系后, 可利用这些相等关系列方程.

为便于看出四个相等关系间的联系, 可将上述相等关系用如下形式表示:

①
快车全部行程 = 450− 慢车行程
② ‖　　　　　‖ ④
85　　　　　65
×　　③　　×
快车全部行驶时间 = 0.5+ 慢车行驶时间

解: 设慢车行驶了 x 小时两车相遇, 则因为

$85(x+0.5)$　↘　　①　　↙　$65x$
快车全部行程 = 450− 慢车行程
② ‖ ↑　　　↑ ‖ ④
85　　　　　65
×　　　　　×
快车全部行驶时间 = 0.5+ 慢车行驶时间
↗　　③　　↖
$x+0.5$　　　　　x

所以由 ① 得 $85(x+0.5)=450-65x$.

上述列法中, 相等关系 ① 作了列方程的依据, 其余三个相等关系作了列代数式的依据.

列二元一次方程组时, 方法与列一元一次方程类似.

解: 设慢车行驶了 x 小时、快车行驶了 y 小时两车相遇, 则因为

快车全部行程 = 450− 慢车行程

$85y$ ↘ ① ↙ $65x$

快车全部行程 = 450− 慢车行程

② ‖ ↑ 85 × ↑ 65 × ‖ ④

快车全部行驶时间 = 0.5+ 慢车行驶时间

↗ ③ ↖

y x

所以由 ① 和 ③ 得

$$\begin{cases} 85y=450-65x, \\ y=0.5+x. \end{cases}$$

此列法中, 相等关系 ① 和 ③ 作了列方程的依据, 其余相等关系作了列代数式的依据.

需要说明的是, 解例1所需要的相等关系, 还可以有别的形式, 如

快车后来行程 = $450-0.5\times85-$ 慢车行程

‖ 85 × ‖ 65 ×

快车后来行驶时间 ══ 慢车行驶时间

例2 把一堆苹果分给几个孩子, 如果每人分3个, 则余8个; 如果前面每人分5个, 则最后一人得到的苹果数不足3个, 求小孩的人数和苹果的个数. [摘自人教版教材初中代数第一册(下) P.80 B组第3题]

解本题所需的相等关系与不等关系是

苹果总数 = 3× 孩子总数 +8 ·············· ①

最后一人得到的苹果数 = 苹果总数 −5×(孩子总数−1) ·· ②

$0\leqslant$ 最后一人得到的苹果数 <3 ········· ③

解: 设共有 x 个孩子, 则由 ① 得

苹果总数是 $3x+8$, 再由 ② 得

最后一人得到的苹果数是

$(3x+8)-5(x-1)$,

∴ 由 ③ 得不等式

$0\leqslant(3x+8)-5(x-1)<3$,

∴ $5<x\leqslant6.5$,

∴ $x=6$,

$3x+8=26$.

二、解题方法的归纳

通过例1的解答可归纳出分析应用题列 n 元方程组的方法.

(1) 弄清题意, 找出解题所需要的全部相等关系, 找全的标准是: 相等关系个数等于未知数个数;

(2) 恰当确定 n 个相等关系作列方程的依据, 其余相等关系作列代数式的依据;

(3) 用 n 个字母分别表示 n 个未知数;

(4) 依据相等关系列出代数式;

(5) 依据相等关系列出方程, 并组成方程组.

通过例2的解答可归纳出分析应用题列不等式的一般方法:

(1) 弄清题意, 找出解题所需的全部相等关系与不等关系;

(2) 用字母表示未知数;

(3) 依据相等关系列出代数式;

(4) 依据不等关系列出不等式.

三、对有关规律的认识

(一) 对相等关系的认识

1. 相等关系的分类

解应用题涉及到的相等关系可分为特殊类与普遍类. 在例1里, 相等关系 ① 和 ③ 是例1所特有的, 属于特殊类; 相等关系 ② 和 ④ 是公式"路程 = 速度 × 时间" 在快、慢车行驶过程中的具体应用, 属于普遍类.

2. 相等关系的作用与用法

分析出的相等关系在解题时或用于作列代数式的依据, 或用于作列方程的依据; 许多情况下, 每一个相等关系既可作列代数式的依据, 也可作列方程的依据; 在一种确定的列方程方

法中, 每一个相等关系只能在作列代数式的依据或作列方程的依据中被使用一次, 也必须被使用一次.

3. 相等关系与数量关系的关系

数量关系不依赖于相等关系而独立存在, 但相等关系中却总包含有数量关系, 相等关系的左边和右边都是数量关系, 如"乙数比甲数大5"就是一个相等关系"乙数 = 甲数 +5", 它右边的"甲数 +5"就是数量关系.

4. 相等关系找全的判别标准

例1的相等关系, 在形式上并不惟一, 但这不妨碍它们都具有"相等关系个数等于未知数个数"的特征. 例1的相等关系, 在数量上也会因分析时是否作了综合而有所区别, 当没有综合时, 其相等关系可以是前面得出的四个; 如果将有些相等关系的含意综合到了另外的相等关系中, 如将 ② 与 ④ 的含意综合到 ① 与 ③ 中 (综合的方法与解方程组时的代入消元法、加减消元法相同), 则得:

85× 快车全部行驶时间 = 450 − 65× 慢车行驶时间,

快车全部行驶时间 = 0.5+ 慢车行驶时间.

此时, 这两个相等关系同样具有"相等关系个数等于未知数个数"的特征. 所以, 无论得出的相等关系在形式上、数量上有什么区别, 只要找全了相等关系, 就一定会具有"相等关系个数等于未知数个数"的特征.

(二) 对列代数式的认识

1. 列代数式的分类

列代数式可分为两类, 一类是依据数量关系列出的, 如人教版教材第一册 (上) 学生阅读部分 P.10 例2, 设甲数为 a, 乙数为 b, 那么列出表示"甲乙两数的和的2倍"的代数式, 只需弄清数量关系就可得出是 $2(a+b)$; 另一类是依据相等关系列出的, 如本文例1中许多代数式的列出.

2. 列代数式的运算性

列代数式的推导过程, 实质上可看作解方程或解方程组的运算过程. 现通过例1从特征、功效两方面加以说明. 在解例1时, 设了慢车行驶 x 小时两车相遇后, 相等关系 ③ 变成了"快车全部行驶时间 $= 0.5 + x$", 此时, x、0.5 都被看作已知数, 只有"快车全部行驶时间"被视为未知数. 所以, 利用此式求出"快车全部行驶时间"的表达式, 完全可看作解一元方程, 因而, 从具体工作的特征看, 列代数式的过程相当于解方程. 另外, 通过对列多元方程组解题和列一元方程解题的比较, 也能从功效上理解列代数式等同于解方程或解方程组. 如对例1, 用列四元一次方程组的方法解答时, 可不列代数式而直接列出四个方程, 然后逐步消去三个元得一个一元一次方程, 此时消去三个元的工作属于解方程组的运算工作,是介于设未知数, 得一个一元一次方程之间的工作, 因而在功效上, 它相当于列一元一次方程中的列代数式.

3. 列代数式与列方程的等价性

与列代数式的运算性中所述情况相同, 对例1, 用列四元一次方程组法解答时, 只需设四个未知数, 列四个方程, 然后通过计算, 就可得出结果, 用列一元一次方程方法解答时, 除需设一个未知数,列一个方程外, 还需列三个代数式, 然后才可求出结果. 将两种方法进行比较, 容易看出, 列一元一次方程中的列三个代数式相当于列四元一次方程组中多列的三个方程. 所以, 列代数式与列方程具有等价性.

4. 列代数式的复杂性

解本文例1时, 代数式 $x + 0.5$ 的列出只利用了一个相等关系, 因而显得容易; 代数式 $85(x + 0.5)$ 的列出则要复杂些, 先利用相等关系 ③ 列出代数式 $x + 0.5$, 再在此基础上利用相等关系 ② 才可列出. 实际中, 类似后者的代数式不仅大量存在, 而且远比列 $85(x + 0.5)$ 这样的代数式复杂, 对此, 只有给予足够的认识和重视, 才会自觉地着手弄清列代数式的依据和推导实质, 使列代数式的教学依据更明确、推理更准确, 方式上注意具体直观, 避免实际教学中列代数式的依据不明、推理不清、过程过于抽象等不当做法.

(三) 对实质与形式的认识

通过列一元方程和二元方程组解例1, 可

以看出:相等关系是应用题本身决定的! 是事物的实质, 它与解题者所选用的方法无关, 根据这一实质所列出的方程或方程组, 其实都是在用数学的方式表现这一实质, 即方程或方程组只是事物的形式! 无论是用列方程、方程组, 还是用列算术式的方法, 甚至是用文盲的方法求例1的答案, 说到底, 都是在用不同的方式对应用题的相等关系加以应用. 反过来, 没有相等关系或相等关系不全时, 无论用什么方法, 题目都无法解答. 尽管现有的许多读物, 并没有像笔者一样, 将解题所需要的相等关系全部明确写出, 然后具体、直观的加以应用, 但在解题时, 都毫不例外地用明确或潜在的方式, 利用了全部相等关系.

(四) *算术方法、列方程方法、列方程组方法的比较*

用列四元一次方程组方法解例1时, 分别设慢车行程为x千米、慢车行驶时间为y小时、快车全部行程s千米、快车全部行驶时间t小时, 则由四个相等关系可得方程组

$$\begin{cases} x=65\times y, \\ s=85\times t, \\ x+s=450, \\ y+0.5=t. \end{cases}$$

上述列法里没有与列方程中类似的列代数式工作, 因而在设未知数、列方程组之间也就没有繁琐的运算工作; 用列方程方法时, 在设未知数、列方程之间则存在这类繁琐运算. 因此, 同样一道应用题, 选用列方程方法解时, 难度要比选用列方程组方法大.

用列算术式的方法解应用题, 可看作是在得出了一元方程的基础上, 再将未知数用含已知数的算式予以表示. 如例1:

$$85(x+0.5)=450-65x$$
$$\Longrightarrow 85x+85\times 0.5=450-65x$$
$$\Longrightarrow 85x+65x=450-85\times 0.5$$
$$\Longrightarrow (85+65)x=450-85\times 0.5$$
$$\Longrightarrow x=(450-85\times 0.5)\div(85+65),$$

显然, 这样的推理过程实质是解方程的运算过程, 且还不能将能进行加、减、乘、除的数的运算结果求出, 只能用算术式表达, 其表达式也颇有蹊跷. 因此, 用列算术式方法比用列一元方程方法绕弯得多, 难得多.

综上, 在弄清了相等关系后, 用列方程组方法解题最容易, 列方程方法次之, 列算术式方法最难.

参考文献

1. 赵振威等. 《中学数学教材教法》. 华东师范大学出版社. 1990年第1版.

2. 戴恩清. 《列方程解应用题》. 湖北教育出版社. 2000年10月第1版.

(上接第2–33页)

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{1}{3}+\alpha\right)^2+\left(\frac{1}{3}+\beta\right)^2+\left(\frac{1}{3}+\gamma\right)^2=\frac{1}{3}+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geqslant\frac{1}{3}.$$

例7正解: 由以上步骤 ①,

$\because |z-\mathrm{i}|=1$, 且$z\neq 0$, $z\neq 2\mathrm{i}$,

$\therefore (z-\mathrm{i})(\overline{z}+\mathrm{i})=1$,

$\therefore z\overline{z}+\mathrm{i}z-\mathrm{i}\overline{z}=0$,

$\therefore \dfrac{z(\overline{z}+2\mathrm{i})}{\overline{z}(z-2\mathrm{i})}=\dfrac{z\overline{z}+2(\mathrm{i}\overline{z}-z\overline{z})}{\overline{z}(z-2\mathrm{i})}=-1$,

$\therefore \dfrac{\omega(\overline{\omega}+2\mathrm{i})}{\overline{\omega}(\omega-2\mathrm{i})}=-1$,

$\therefore \omega\overline{\omega}+\mathrm{i}\omega-\mathrm{i}\overline{\omega}=0$,

$\therefore |\omega-\mathrm{i}|=1$, $\omega\neq 2\mathrm{i}$.

2. 反思: 在平时的教学中, 应强调数学的推理步步有据, 说理充分, 没有证明的或未知的条件不可随便采用, 否则就会犯以上错误.

数学解题要善于从题目的条件和问题解决的过程中提取有用的信息, 使之作用于记忆系统的数学认知结构, 提取相关的知识, 推动题目的信息的延伸, 归纳到某一个确定的数学关系, 从而形成一个解题的行动序列. 在此过程中应避免解题序列中出现差错或出现“跳跃”, 从而促使问题解决获得“圆满成功”.

关于圆锥曲线探究性学习的尝试

315300 浙江省宁波慈溪育才中学 方建成

1. 问题背景

笔者以人民教育出版社编的教科书第二册(上) P.123 习题8.6的第6题为素材, 组织指导学生开展探究性学习, 学生的探究热情和巨大的潜能给我留下深刻的印象.

问题: 过抛物线焦点的一条直线与它交于两点P、Q, 经过P点和抛物线顶点的直线与准线交于点M, 求证直线MQ平行于抛物线的对称轴.

2. 解决原问题

笔者不急于把解法抛给学生, 而是引导学生以抛物线$y^2=2px$为例, 分析条件:

(1) P、F、Q三点共线;

(2) P、O、M三点共线;

(3) $MQ/\!/x$轴.

要求由条件(1)、(2) $\Longrightarrow$ (3), 通过学生独立思考, 很快有学生得到如下解法:

如图1, 设抛物线方程为$y^2=2px$, 焦点$F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$, 直线$PQ$方程为$x=my+\dfrac{p}{2}$,

$$\begin{cases} y^2=2px \\ x=my+\dfrac{p}{2} \end{cases} \Longrightarrow y^2-2mpy-p^2=0.$$

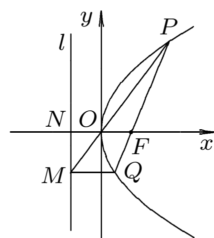


图 1

设$P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$, 则$y_1y_2=-p^2$, $y_2=-\dfrac{p^2}{y_1}$, 直线PO方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1}x$.

令$x=-\dfrac{p}{2}$, 得$y_M=-\dfrac{py_1}{2x_1}$.

由$y_1^2=2px_1$, 得$\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{2p}{y_1}$, 所以

$y_M=-\dfrac{p}{2}\cdot\dfrac{2p}{y_1}=-\dfrac{p^2}{y_1}$,

则有$y_2=y_M$, 所以$MQ/\!/x$轴.

3. 提出新问题

笔者对学生的证明给予充分肯定, 及时表扬后, 有位学生从这个命题的逆命题出发提出新的命题:

(1) 若$MQ/\!/x$轴, P、F、Q三点共线, 则有P、O、M三点共线.

(2) 若$MQ/\!/x$轴, P、O、M三点共线, 则有P、F、Q三点共线.

笔者又一次表扬同学们从逆命题出发探究数学问题的好方法, 指出新命题(1)正是2001年全国高考数学(理)第19题. 这下同学们更来劲了, 现将学生证明命题(1)、(2)的过程简录如下:

(1) $k_{OP}=\dfrac{y_1}{x_1}$, $k_{OM}=\dfrac{2y_2}{-p}$, 而$y_1y_2=-p^2$, 所以$k_{MO}=\dfrac{\dfrac{-p^2}{y_1}}{-\dfrac{p}{2}}=\dfrac{2p}{y_1}$, 由$y_1^2=2px_1$, 得$\dfrac{p}{y_1}=\dfrac{y_1}{2x_1}$,

所以$k_{MO}=2\cdot\dfrac{y_1}{2x_1}=\dfrac{y_1}{x_1}$,

所以$k_{OP}=k_{MO}$, 即P、O、M三点共线.

(2) $k_{FP}=\dfrac{y_1}{x_1-\dfrac{p}{2}}$, $k_{FQ}=\dfrac{y_2}{x_2-\dfrac{p}{2}}$,

$\because$ P、O、M三点共线,

$\therefore$ $\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{-2y_2}{p}$, 即$y_2=-\dfrac{py_1}{2x_1}$,

$\therefore$ $k_{FQ}=\dfrac{-\dfrac{py_1}{2x_1}}{x_2-\dfrac{p}{2}}$, 而$x_2=\dfrac{y_2^2}{2p}$,

$\therefore\ x_2=\dfrac{1}{2p}\cdot\dfrac{p^2y_1^2}{4x_1^2}=\dfrac{py_1^2}{8x_1^2}$,

$$\therefore\ k_{FQ}=\frac{-\dfrac{py_1}{2x_1}}{\dfrac{py_1^2}{8x_1^2}-\dfrac{p}{2}}=\frac{-\dfrac{py_1}{2x_1}}{\dfrac{p\cdot 2px_1}{8x_1^2}-\dfrac{p}{2}}$$
$$=\frac{y_1}{x_1-\dfrac{p}{2}},$$

$\therefore\ k_{FP}=k_{FQ}$, 故$P$、$F$、$Q$三点共线.

4. 进一步探究

笔者向学生提出"类比"是探究数学问题的又一重要思维方式, 对椭圆、双曲线, 我们是否可得到相关的真命题.

探究过程:

(1) 设椭圆左焦弦PQ, 若过Q作$MQ/\!/x$轴, 连直线PA与直线MQ交于点M, 则点M在准线l上(如图2).

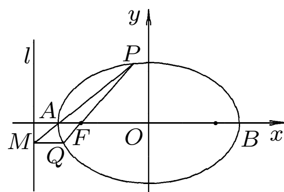


图 2

此命题很快被部分学生否定, 理由是抛物线是不封闭曲线, 椭圆是封闭曲线, 性质不一样, 结论肯定不成立. 又有学生以$PQ\perp x$轴的特别位置, 验证否定点M在准线l上.

(2) 设椭圆左焦弦PQ, 若连接PA、QB的直线交于点M, 则点M在左准线l上(如图3).

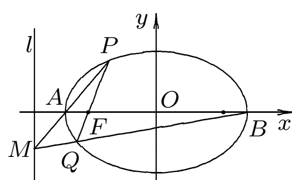


图 3

有学生简证如下:

设椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>b>0)$, $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$、$A(-a,0)$、$B(a,0)$、$F(-c,0)$.

直线l的方程为$x=-\dfrac{a^2}{c}$,

直线PA的方程为$y=\dfrac{y_1}{x_1+a}(x+a)$.

令$x=-\dfrac{a^2}{c}$, 得$y_M=\dfrac{y_1}{x_1+a}a\left(1-\dfrac{a}{c}\right)$.

直线BQ的方程为$y=\dfrac{y_2}{x_2-a}(x-a)$.

令$x=-\dfrac{a^2}{c}$, 得$y_{M'}=\dfrac{y_2}{x_2-a}a\left(-1-\dfrac{a}{c}\right)$.

只要证$y_M=y_{M'}$, 即

$\dfrac{y_1}{x_1+a}\left(1-\dfrac{a}{c}\right)=\dfrac{y_2}{x_2-a}\left(-1-\dfrac{a}{c}\right)$.

而PQ直线方程为$x=my-c$, 只要证:

$$\frac{y_1}{my_1-c+a}\left(1-\frac{a}{c}\right)$$
$$=\frac{-y_2}{my_2-c-a}\left(1+\frac{a}{c}\right)$$
$$\Longleftrightarrow 2my_1y_2=-\frac{b^2}{c}(y_1+y_2).$$

由$\begin{cases}x=my-c\\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\end{cases}$

$\Longrightarrow (b^2m^2+a^2)y^2-2mcb^2y-b^4=0$,

得$y_1+y_2=\dfrac{2mcb^2}{b^2m^2+a^2}$,

$y_1y_2=\dfrac{-b^4}{b^2m^2+a^2}$,

所以$2m\dfrac{-b^4}{b^2m^2+a^2}=-\dfrac{b^2}{c}\dfrac{2mcb^2}{b^2m^2+a^2}$成立,

即点M在准线l上.

(3) 设双曲线方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, 过右焦点$F$的弦$PQ$(如图4), 顶点$A$、$B$, 连$PB$、$AQ$的直线交于点$M$, 则点$M$在右准线$l$上.

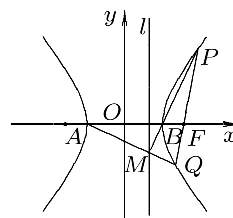


图 4

(4) 由图1, 若过抛物线焦点F的弦PQ, 过Q作$MQ/\!/x$轴, 交准线l于点M, l与x轴交于点N, 则PM平分线段NF.

(5) 如图5, 若过椭圆左焦点F的弦PQ, 过Q作$MQ/\!/x$轴, 交左准线l于点M, l与x轴交于点N, 则连接PM的直线平分线段NF.

对输液浓度的讨论

3312030 浙江省绍兴柯岩中学 毛幼娥

医学上常用吊瓶式输液器给病人输液, 具体的做法是将两只装有液体的瓶用一根软管串接悬挂起来, 安装如图1所示. A瓶下面接有一根输液的软管和注射针, 在B的下面插入一根小的导气管, 观察其液体流出的情况, 有以下现象: (1)液体基本上匀速流出的; (2)B瓶内液体逐渐流向A瓶, 连接A瓶的针管虽有液体流出, 但A瓶内液体高度不变, 直至B瓶内液体减少到零, A瓶的液体才开始下降.

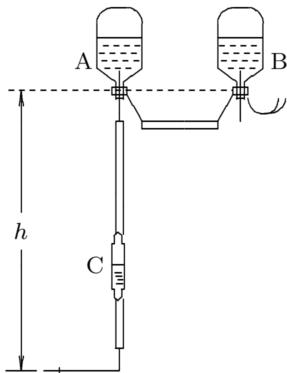


图 1

既然B瓶液体先流完, A瓶后流完. 那么, 从A瓶下面连接的针管中流出的液体, 到底是A瓶内的液体呢, 还是B瓶内的液体呢? 我们不妨将A瓶装入纯净水, B瓶装入红墨水, 观察发现, 针管内流出的是颜色逐渐变红的水, 那么, 这种红水的浓度是怎样变化的呢? 是否可通过分析, 计算当B瓶内的红墨水刚流完时, 从针管流出的液体浓度为多少?

为了使问题简化, 我们假设A瓶内液体是没有溶质的液体, B瓶内液体全部是溶质, 浓度的定义为: $k=\dfrac{\text{溶质的体积}}{\text{溶液的体积}}$. 那么, 当B瓶内溶质流完时, 从输液针头输出的液体的浓度是多少? 考虑到一个瓶内的液体是分n次流出的. 因此, 我们只要计算这n次流出的溶质的总量a_n, 就可以得出，当B瓶内溶质刚流完时, A瓶内溶液的浓度, 下面我们计算这个溶质的流出总量(体积).

假设A瓶内液体分两次流出, 第一次流出$\dfrac{1}{2}$(瓶), 此时溶质还没有流出, B瓶内溶质马上给予补充$\dfrac{1}{2}$(瓶), 并设这些溶质很快被均匀分布到A瓶液体内, 这一点假设将随次数n的增多而成立. 因此, A瓶内液体的浓度变为$\dfrac{1}{2}$. 第二次A瓶内溶液再流出$\dfrac{1}{2}$(瓶), 其中流出的溶

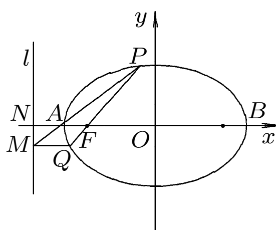


图 5

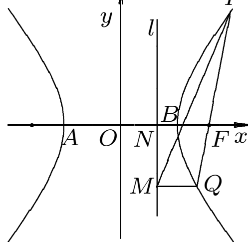


图 6

(6)如图6, 若过双曲线右焦点F的弦PQ, 过Q作$MQ /\!/ x$轴, 交右准线l于点M, l与x轴交于点N, 则连接PM的直线平分线段NF.

在数学问题"横向"探究的师生互动中, 探究数学问题的乐趣与激情使我觉得探究性学习是激发学生学习数学兴趣的一种有效手段, 同时也给我们获得了探究数学问题的方法之一是"逆命题"探究和"类比"探究, 学会提出问题比学会解决问题更重要, 让我们一起来充分挖掘课本资源, 多从数学问题的背景入手, 多角度去探究、去思考, 提出更多、更深刻的问题, 共享探究性学习数学的乐趣.

质为$a_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$, 接下来B瓶内溶质马上给予补充$\frac{1}{2}$(瓶), 这样, 流出溶质总量为$a_2=\frac{1}{4}$.

假设A瓶内液体分三次流出, 第一次流出$\frac{1}{3}$瓶后, 此时溶质还没有流出, B瓶内溶质马上给予补充$\frac{1}{3}$瓶, 此时溶液的浓度为$\frac{1}{3}$, 第二次A瓶内溶液再流出$\frac{1}{3}$(瓶), 这部分溶液的溶质为$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$, 接着, B瓶内再予以补充$\frac{1}{3}$瓶, A瓶内溶液的浓度为 $\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right]$, 第三次A瓶内溶液再流出$\frac{1}{3}$瓶. 流出部分溶液的溶质为 $\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right]$. 三次(实际只有两次)共流出的溶质为

$$a_3=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\right)\right].$$

整理可得$a_3=\frac{3}{3^2}-\frac{1}{3^3}$.

假设A瓶内液体分四次流出: 第二次流出的溶质为: $\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}$, 第三次流出的溶质为: $\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\right]$, 第四次流出的溶质为:

$$\frac{1}{4}\times\left\{\frac{1}{4}+\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\right]-\frac{1}{4}\times\left[\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\right)\right]\right\},$$

流出的总量为: $a_4=\frac{6}{4^2}-\frac{4}{4^3}+\frac{1}{4^4}$,

同理可得: $a_5=\frac{10}{5^2}-\frac{10}{5^3}+\frac{5}{5^4}-\frac{1}{5^5}$,

$$a_6=\frac{15}{6^2}-\frac{20}{6^3}+\frac{15}{6^4}-\frac{6}{6^5}+\frac{1}{6^6}.$$

从上面这个数列可以看出, 直接要得出a_n的通式似乎很难. 倘若每一项都加一个数同时减去相同一个数, 如a_3加上$\left(1-\frac{3}{3}\right)$, a_4加上$\left(1-\frac{4}{4}\right)$, $\cdots$, 则数列的和是不变的, 这样, 任一项两边都成对称, 它成杨辉三角的形式, 这样所得新的数列如下面所示:

$$a_2=1-\frac{2}{2}+\frac{1}{2^2}=\left(1-\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$a_3=1-\frac{3}{3}+\frac{3}{3^2}-\frac{1}{3^3}=\left(1-\frac{1}{3}\right)^3,$$

$$a_4=1-\frac{4}{4}+\frac{6}{4^2}-\frac{4}{4^3}+\frac{1}{4^4}=\left(1-\frac{1}{4}\right)^4,$$

$\cdots\cdots$

那么, 它的通项是$a_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

很显然, 液体从B流向A几乎是连续的, 这样, 次数必须是无穷多, 即n趋向于无穷大, 对a_n取极限, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}=0.368$.

这样我们就可得出, 当B瓶液体刚流完时, 从A瓶内流出的溶质总量为0.368(瓶), 从而可得出A瓶下面针管流出的液体浓度为 $(1-0.368)\times100\%=63.2\%$.

我们也可以用另一种方法来计算这个问题. 先把每瓶液体分成n等份, 第一次A瓶内流出1份, 然后B瓶流入A瓶1份, 此时A瓶内液体的浓度为$\frac{1}{n}$, 记作$a_1=\frac{1}{n}$; 第二次A瓶内再流出1份, B瓶流入$\frac{1}{n}$, 此时A瓶内的浓度为

$$a_2=\frac{(n-1)\times\frac{1}{n}}{n}+\frac{1}{n}=\frac{a_1\times(n-1)+1}{n}.$$

同理 $a_n=\frac{a_{n-1}\times(n-1)+1}{n}$,

$$(a_n-1)=\frac{n-1}{n}(a_{n-1}-1),$$

$$\therefore\ a_n=1+(a_1-1)\times\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1}=1+\left(\frac{1}{n}-1\right)\times\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}=1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n.$$

同前面讨论, 对a_n取极限, 即可得上面结论.

这样, 如果第一瓶液体流出的时间是T, 因为液体流出是匀速的, 我们同时假设浓度的变化也是均匀增加的, 那么, 浓度变化的递增函数关系为: $k=\frac{0.632}{T}t\times100\%$, $(t\leqslant T)$.

当$t>T$时, 浓度保持为63.2%不变, 直至第二瓶流完.

参考文献

余继光. 用数学眼光看世界. 中国工人出版社.

关于求"取值范围"的一些问题

556000 贵州省凯里市黔东南民族师范高专 罗时健

求"取值范围"问题, 是中学数学中最为常见的题型之一. 解题思想方法几乎包罗万象, 综合性强, 故也是中学数学中的难点之一. 有的教师在教学时 (包括一些书刊上发表的解法), 也存在一些值得商榷之处. 对此, 笔者拟借方寸之篇幅, 谈一些浅见供参考.

一、首先要弄清何为"取值范围"

导致解题陷入误区的一个重要原因, 就是未弄清何谓"取值范围", 以致将"估值范围"取而代之. 我们说"求满足给定条件的某个参变量的取值范围"包含了两层意思: 1. 参变量满足该条件就必落在这个范围内; 2. 参变量落入这个范围就必满足该条件. 用数学符号表示:"a满足条件$A \Longrightarrow a \in I$; $a \in I \Longrightarrow a$满足条件$A$", 因此"取值范围"带有充要性. 而"估值范围"就不同了. 比如对$\sin\theta\,(\theta \in \mathbf{R})$, 我们有$-2 < \sin\theta < 2$. 对$\sin\theta$的值作此估计无疑正确; 但反过来在$(-2,2)$中取一个值$\dfrac{3}{2}$, 却找不到一个$\theta$的值能使$\sin\theta = \dfrac{3}{2}$. 而作出估值$-1 \leqslant \sin\theta \leqslant 1\,(\theta \in \mathbf{R})$就不同了. $[-1,1]$是量$\sin\theta$的取值范围. 因此"取值范围"也是"估值范围"(最佳估值), 但"估值范围"却不一定是取值范围. 为说明这一点我们对下例及其误解作一剖析:

例1　若函数$y = a^x\,(0 < a \neq 1)$与函数$y = \log_b x\,(0 < b \neq 1)$交于点$P(x_0, y_0)$ $\left(2 < x_0,\, 0 < y_0 < \dfrac{1}{2}\right)$, 求$a$、$b$的取值范围.

误解: 依题意, 作出两个函数的图象相交于点$P(x_0, y_0)$的情况如下(图1).

可知 $0 < a < 1$, $b > 1$.

分析: 答案是错误的, 解题者虽然画出了点$P(x_0, y_0)$应在的平面区域 $\left\{(x,y)\,\middle|\,x > 2, 0 < y < \dfrac{1}{2}\right\}$(阴影部分所示), 但忽略了点$P$如落入一个"更大"的区域 $\{(x,y)|1 < x, 0 < y < 1\} \supset \left\{(x,y)\,\middle|\,x > 2, 0 < y < \dfrac{1}{2}\right\}$(图1)也有结论$0 < a < 1$, $b > 1$成立, 有悖于取值范围的充要性. 故$0 < a < 1$, $b > 1$不是a、b的"取值范围"而是"估值范围".

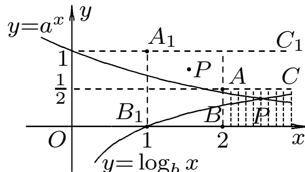


图 1

正确的图象解法应该是(见图2), 在平面直角坐标系内作出点P所在的区域$\left\{(x,y)\,\middle|\,2 < x, 0 < y < \dfrac{1}{2}\right\}$(阴影所示).

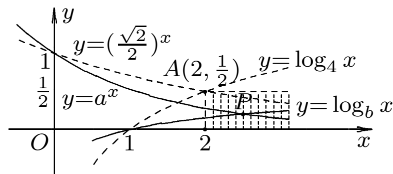


图 2

过点$A\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$的两条指数曲线、对数曲线由待定系数法可知其对应的函数分别为$y = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^x$, $y = \log_4 x$(虚线所示), 则显然有$y = a^x$, $y = \log_b x$交于

$$P(x_0, y_0) \in \left\{(x,y)\,\middle|\,2 < x, 0 < y < \frac{1}{2}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a^x < \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^x \\ 0 < a < 1 \end{cases} \cdots\cdots ①$$

及 $$\begin{cases} \log_b x < \log_4 x \\ b > 1 \end{cases} \cdots\cdots ②$$

解①、②得 $0 < a < \dfrac{\sqrt{2}}{2}, b > 4$.

二、"取极端"应慎重

常见一些文章介绍解"取值范围"问题的"取极端"法. 这些"取极端"法的确给人以简捷可行的感觉, 而且针对给出的具体问题也具正确性. 但是, 它针对性较强, 并不具普遍性. "取极端"法主要是要看给出的函数在给定的区间内是否具有凸性, 方可奏效. 如果函数在给定的区间内有拐点, 答案就要出问题. 而这一点教师一时又无法对高中学生说清楚(高中生只具备最基本, 最浅显的数学分析知识). 学生一旦看到教师用"极端法"解了一题觉得简便易行, 便易不分青红皂白地仿效照搬. 这就易陷入误区. 例如:

例2 若对任意的$x\in(1,2]$, $\log_a x > (x-1)^2$. 求a的取值范围.

解: 取$x=2$, 也应有$\log_a 2 > 1$成立, 即$\log_a 2 > \log_a a$. 若$0<a<1$, 则$x\in(1,2]$, $\log_a x < 0$不可能有$\log_a x > (x-1)^2$成立. 于是必$a>1$, 由$\begin{cases} a>1 \\ \log_a 2 > \log_a a, \end{cases}$ 即有$1<a<2$.

分析: 这一解法对函数$y=\log_a x$, $y=(x-1)^2$在$(1,2]$分别为上凸、下凸无疑是正确的. 但对下面一题也如此照搬那就不对了.

例3 对任意的$x\in[-1,1)$都有$x^3<a(x-1)^2+1$, 求a的取值范围.

仿例2解法: $\because$ $x=-1\in[-1,1)$, $\therefore$ $(-1)^3<a(-1-1)^2+1$, 即$-1<4a+1$也成立. 即得$a>-\dfrac{1}{2}$. 错了! (因为$y=x^3$在$[-1,1)$内有拐点$x=0$).

正确解法是: 参变分离: $a>\dfrac{x^3-1}{(x-1)^2}$, $a>\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. 令$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$, 求$f(x)$在$[-1,1)$的最值:

$$f'(x)=\frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}=\frac{[x-(1-\sqrt{3})][x-(1+\sqrt{3})]}{(x-1)^2},$$

令$f'(x)=0$得$[-1,1)$内的惟一驻点$x=1-\sqrt{3}$. 且当$x<1-\sqrt{3}$, $f'(x)>0$; $x>1-\sqrt{3}$, $f'(x)<0$. $\therefore$ 当$x\in[-1,1)$, $f(x)\leqslant 3-2\sqrt{3}$. 而欲对任意的$x\in[-1,1)$都有 $a>\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\Longleftrightarrow a>3-2\sqrt{3}$. $\therefore$ a的取值范围为$a>3-2\sqrt{3}$.

因此, 介绍"取极端"法要慎重.

三、用不等式放缩法求取值范围, 应每步放缩都具可逆性

用不等式的性质进行"放"、"缩", 也是求"取值范围"的一个常用方法, 但是应注意"放"、"缩" 过程中的每一步都必须可逆以使充要性链不致中断, 才能保证"取值范围"的充要性. 如不能达到这样的要求就应当另择它法.

例4 $x\in\left(-\dfrac{3}{2},2\right)$, 求函数$y=\dfrac{x-1}{2x+3}$的值域.

解: 函数可恒等变形为$y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{5}{2(2x+3)}$,

$$-\frac{3}{2}<x<2 \Longleftrightarrow -3<2x<4$$
$$\Longleftrightarrow 0<2x+3<7$$
$$\Longleftrightarrow 1<\frac{7}{2x+3} \Longleftrightarrow \frac{5}{7}<\frac{5}{2x+3}$$
$$\Longleftrightarrow -\frac{5}{14}>-\frac{5}{2(2x+3)}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}-\frac{5}{14}>\frac{1}{2}-\frac{5}{2(2x+3)}$$
$$\Longleftrightarrow \frac{1}{7}>y.$$

故函数值域为$y<\dfrac{1}{7}$.

例5 $x\in[1,2]$, 求函数$y=\dfrac{x^2}{x+1}$的值域.

分析与解答: 先用不等式法试之:

$1\leqslant x\leqslant 2 \Longleftrightarrow 2\leqslant x+1\leqslant 3$及 $1\leqslant x^2\leqslant 4$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{3}\leqslant\frac{1}{x+1}\leqslant\frac{1}{2} \text{ ① 及 } 1\leqslant x^2\leqslant 4 \text{ ②}$$

(下转第2–49页)

几个常用不等式的共同特点及其应用

643000 四川省自贡市第十七中学 胡格林

$a^2+b^2\geqslant 2ab$, $ax+by\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$, $a+b\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}$是中学数学中几个常用的不等式, 应用广泛, 其中的a、b、x、y是任意的实数. 但如果我们设法将a、b、x、y与三角函数中的$\sin\theta$、$\cos\theta$联系起来. 我们会发现这些不等式还有更精彩的一面, 有更广泛的用途.

三角函数中和角公式 $\sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi$是一个很重要的公式. 下面我们用它来研究前面的几个不等式.

1. $\because$ $2ab=ba+ab=\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\cdot\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$,

令$\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, 其中角$\theta$终边过点$(a,b)$.

$$\begin{aligned}\therefore 2ab&=(a^2+b^2)(\sin\theta\cos\theta+\cos\theta\sin\theta)\\&=(a^2+b^2)\sin 2\theta.\end{aligned}$$

$\because$ $\sin 2\theta\leqslant 1$,

$\therefore$ $2ab\leqslant a^2+b^2$, 当且仅当$2\theta=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, 即$\theta=k\pi+\frac{\pi}{4}\,(k\in\mathbf{Z})$, 亦即$a=b$时取等号.

2. $\because$ $ax+by=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$,

令$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 则

$$\begin{aligned}ax+by&=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)\\&=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\cos\varphi+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\sin\varphi\right]\\&=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\varphi\right),\end{aligned}$$

(其中角θ、φ的终边分别过点$M(a,b)$和$N(x,y)$).

$\because$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\varphi\right)\leqslant 1$,

$\therefore$ $ax+by\leqslant\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}$, 当且仅当$\varphi-\theta=2k\pi\,(k\in\mathbf{Z})$, 即射线$OM$、$ON$重合, 亦即$\frac{a}{x}=\frac{b}{y}>0$时等号成立.

注意, 由$ax+by=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\varphi\right)$得到$ax+by=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}\cos(\theta-\varphi)$, 这正是向量$\overrightarrow{OM}$、$\overrightarrow{ON}$的数量积公式

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=\left|\overrightarrow{OM}\right|\cdot\left|\overrightarrow{ON}\right|\cos\langle\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\rangle$$

的坐标形式.

3. $\because$
$$\begin{aligned}a+b&=\sqrt{2}\left(a\sin\frac{\pi}{4}+b\cos\frac{\pi}{4}\right)\\&=\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2}\left(\sin\frac{\pi}{4}\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\cos\frac{\pi}{4}\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right),\end{aligned}$$

令$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. (角$\theta$终边过点$M(a,b)$), 则$a+b=\sqrt{2(a^2+b^2)}\cdot\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)=\sqrt{2(a^2+b^2)}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$. 由于$\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\leqslant 1$.

$\therefore$ $a+b\leqslant\sqrt{2(a^2+b^2)}$, 当且仅当$\theta=2k\pi+\frac{\pi}{4}\,(k\in\mathbf{Z})$, 即$a=b>0$时取等号.

由以上推导, 利用$\sin(\theta+\varphi)=\sin\theta\cos\varphi+\cos\theta\sin\varphi$不仅可以证明上述不等式,更让我们找到了这几个不等式联系三角函数的一个共同特点: 由于

$$2ab=(a^2+b^2)\sin 2\theta,$$

$$ax+by=\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\varphi\right),$$

$$a+b=\sqrt{2(a^2+b^2)}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right),$$

即如前所述的几个不等式的一边乘以一个适当的$\sin(\alpha+\beta)$, 那么这些不等式都可以转换成等式. 过去我们用这些不等式解题时, 由于不等式放缩的单向性, 只能求出最大值或只能求出最小值. 现在我们利用这些等式中$\sin(\alpha+\beta)$的取值范围. 则既可以求出最大值, 又可以求出最小值. 下面举几例加以说明:

例1 设$-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{3}$, 且

$$y=-\sqrt{2-3x^2},$$

求$u=xy$的值域.

解: $\because\ u=x(-\sqrt{2-3x^2})$

$$=-\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{3}x\sqrt{2-3x^2},$$

由前面推导得

$$u=-\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{2}[(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{2-3x^2})^2]\sin 2\theta$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 2\cdot\sin 2\theta=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\theta,\text{其中}$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{2-3x^2})^2}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x,$$

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{2-3x^2}}{\sqrt{(\sqrt{3}x)^2+(\sqrt{2-3x^2})^2}}=\frac{\sqrt{2-3x^2}}{\sqrt{2}}.$$

$\because\ -\dfrac{\sqrt{6}}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,

$\therefore$ 取$-\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

即 $-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2\theta\leqslant\pi$,

$\therefore\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\sin 2\theta\leqslant 1$,

$\therefore\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\sin 2\theta\leqslant\dfrac{1}{2}$,

$\therefore\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\leqslant u\leqslant\dfrac{1}{2}$, 即

$u=xy$的值域为 $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{1}{2}\right]$.

例2 求函数$y=5\sqrt{x-1}+\sqrt{10-2x}$的值域.

解: $\because\ y=5\sqrt{x-1}+\sqrt{2}\sqrt{5-x}$,

又$\sqrt{5^2+(\sqrt{2})^2}=3\sqrt{3}$,

$\sqrt{(\sqrt{x-1})^2+(\sqrt{5-x})^2}=2$,

$$\therefore\ y=6\sqrt{3}\left(\frac{5}{3\sqrt{3}}\frac{\sqrt{x-1}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\frac{\sqrt{5-x}}{2}\right).$$

令$\sin\theta=\dfrac{5}{3\sqrt{3}}$, $\cos\varphi=\dfrac{\sqrt{x-1}}{2}$, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$, $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{5-x}}{2}$.

$\therefore\ y=6\sqrt{3}\sin(\theta+\varphi)$. 由于$\sin\theta>\cos\theta>0$, 取$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$.

又$\cos\varphi\geqslant 0$, $\sin\varphi\geqslant 0$, 故取$0\leqslant\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}$, $\therefore\ \theta\leqslant\theta+\varphi\leqslant\dfrac{\pi}{2}+\theta$.

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\cos\theta=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)\leqslant\sin(\theta+\varphi)\leqslant 1$, 即$\dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}6\sqrt{3}\leqslant 6\sqrt{3}\sin(\theta+\varphi)\leqslant 6\sqrt{3}$, 即$2\sqrt{2}\leqslant y\leqslant 6\sqrt{3}$.

$\therefore$ 函数值域为$[2\sqrt{2},6\sqrt{3}]$.

例3 若$\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=5$, 求$x+y$的范围.

解: $\because\ 5=\sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}$

$=\sqrt{2}\left(\sqrt{x+1}\sin\dfrac{\pi}{4}+\sqrt{y-2}\cos\dfrac{\pi}{4}\right)$,

$\because\ \sqrt{(\sqrt{x+1})^2+(\sqrt{y-2})^2}=\sqrt{x+y-1}$,

$$\therefore\ 5=\sqrt{2}\sqrt{x+y-1}\left(\sin\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+y-1}}+\cos\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{y-2}}{\sqrt{x+y-1}}\right).$$

令$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+y-1}}$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{y-2}}{\sqrt{x+y-1}}$. 则$5=\sqrt{2(x+y-1)}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$, 由于$\cos\theta\geqslant 0$, $\sin\theta\geqslant 0$, 取$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

$\therefore\ \dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{4}+\theta\leqslant\dfrac{3}{4}\pi$,

$\therefore\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\leqslant 1$.

又$\because\ \sqrt{2(x+y-1)}=\dfrac{5}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)}$,

$\therefore\ 5\leqslant\sqrt{2(x+y-1)}\leqslant 5\sqrt{2}$, 平方即得$\dfrac{27}{2}\leqslant x+y\leqslant 26$,

$\therefore\ x+y$的范围是$\left[\dfrac{27}{2},26\right]$.

例4 设x、$y\in\mathbf{R}^+$, a为常数, 不等式

$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$恒成立, 求证$a\geqslant\sqrt{2}$.

证明: 由前面推导知:

$$\sqrt{x}+\sqrt{y} =\sqrt{2\left[(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2\right]}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) =\sqrt{2(x+y)}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right),$$

其中$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}}$, $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+y}}$. 显然$\cos\theta>0$, $\sin>0$, 可取$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$. 故可知$\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\leqslant 1$, 即$\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant\sqrt{2(x+y)}$,

又∵ $\sqrt{x}+\sqrt{y}\leqslant a\sqrt{x+y}$恒成立,

∴ $\sqrt{2(x+y)}\leqslant a\sqrt{x+y}$应恒成立.

∴ $a\geqslant\sqrt{2}$.

例5 已知$a\geqslant-\dfrac{1}{2}$, $b\geqslant-\dfrac{1}{2}$, 且$a+b=1$, 求证$\sqrt{a+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{b+\dfrac{1}{2}}\geqslant\sqrt{2}$.

证明: ∵ $\sqrt{a+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{b+\dfrac{1}{2}}$

$$=\sqrt{2\left[\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{b+\frac{1}{2}}\right)^2\right]}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$$

$$=\sqrt{2(a+b+1)}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right),$$ 其中

$$\cos\theta=\frac{\sqrt{a+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{b+\frac{1}{2}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{a+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}},$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{b+\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(\sqrt{a+\frac{1}{2}}\right)^2+\left(\sqrt{b+\frac{1}{2}}\right)^2}}=\frac{\sqrt{b+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}},$$

∵ $a\geqslant-\dfrac{1}{2}$, $b\geqslant-\dfrac{1}{2}$,

∴ $\cos\theta\geqslant 0$, $\sin\theta\geqslant 0$, 取$0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}$,

∴ $\dfrac{\pi}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{4}+\theta\leqslant\dfrac{3}{4}\pi$,

∴ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\leqslant\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)\leqslant 1$.

∴ $\sqrt{a+\dfrac{1}{2}}+\sqrt{b+\dfrac{1}{2}}\geqslant 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$.

∴ 不等式成立.

(上接第2–42页)

C的交点$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$,

则有$\begin{cases}y=kx+m,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$ 解得

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2kmx+a^2m^2-a^2b^2=0,$$

∵ $\Delta>0$, ∴ $m^2<b^2+a^2k^2$,

即$-\sqrt{b^2+a^2k^2}<m<\sqrt{b^2+a^2k^2}$.

则$x_1+x_2=-\dfrac{2a^2km}{b^2+a^2k^2}$,

$y_1+y_2=kx_1+m+kx_2+m=\dfrac{2b^2m}{b^2+a^2k^2}$,

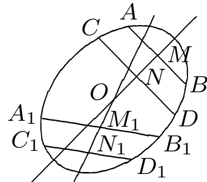
∴ AB中点M的坐标为

$$\left(-\frac{a^2km}{b^2+a^2k^2},\frac{b^2m}{b^2+a^2k^2}\right).$$

∴ 线段AB的中点M在过原点的直线$b^2x+a^2ky=0$上.

(3) 如图, 作两条平行直线分别交椭圆于A、B和C、D, 并分别取AB、CD的中点M、N, 连接直线MN;

又作两条平行直线(与前两条直线不平行)分别交椭圆于A_1、B_1和C_1、D_1, 并分别取A_1B_1、C_1D_1的中点M_1、N_1, 连接直线M_1N_1, 那么直线MN和M_1N_1的交点O即为椭圆中心.



二次曲线中$OA\perp OB$的处理方法

215006 江苏省苏州市第一中学 刘祖希

"$OA\perp OB$"时常出现在二次曲线弦的问题中, 本文介绍4种等价转化处理方法, 供参考.

1. 等价转化为"$x_1x_2+y_1y_2=0$"

无论是通过$k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$, 还是 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, 都可将$OA\perp OB$等价转化为$x_1x_2+y_1y_2=0$, 其中$A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$.

例1 (1991年全国高考题)双曲线的中心在坐标原点O, 焦点在x轴上. 过双曲线右焦点且斜率为$\sqrt{\dfrac{3}{5}}$的直线交双曲线于P、Q两点, 若$OP\perp OQ$, $|PQ|=4$, 求双曲线的方程.

解法1: 设双曲线、直线PQ的方程分别为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $y=\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x-c)$. 其中$a$、$b$、$c$未知, 要求$a$、$b$, 联立, 分别消去$x$、$y$得 $(5b^2-3a^2)x^2+6a^2cx-3a^2c^2-5a^2b^2=0$, ①

$(5b^2-3a^2)y^2+2\sqrt{15}b^2cy+3b^4=0$, ②

$\therefore\ x_1x_2=\dfrac{-3a^2c^2-5a^2b^2}{5b^2-3a^2}$,

$y_1y_2=\dfrac{3b^4}{5b^2-3a^2}$,

由$OP\perp OQ$知, $x_1x_2+y_1y_2=0$,

$\therefore\ \dfrac{-3a^2c^2-5a^2b^2}{5b^2-3a^2}+\dfrac{3b^4}{5b^2-3a^2}=0$,

$3b^4-3a^2c^2-5a^2b^2=0$,

结合$c^2=a^2+b^2$,得 $b^2=3a^2$, $c=2a$,

代入 ①,得 $4x^2+4ax-9a^2=0$,

由弦长公式

$|PQ|=\sqrt{1+\dfrac{3}{5}}\cdot\sqrt{a^2+9a^2}=4$,

解得$a^2=1$,

从而双曲线方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

2. 等价转化为"以AB为直径的圆过原点"

"$OA\perp OB$"还等价于"以AB为直径的圆过原点".

例2 题同例1.

解法2: 在解法1中, $\because$ P、Q为不同两点, $\therefore\ 5b^2-3a^2\neq0$.

将 ① 、② 相加, 得过P、Q两点的圆系方程 $(5b^2-3a^2)(x^2+y^2)+6a^2cx+2\sqrt{15}b^2cy+(3b^4-3a^2c^2-5a^2b^2)=0$, ③

由$OP\perp OQ$知, 原点O在以PQ为直径的圆上,

令x=y=0, 得 $3b^4-3a^2c^2-5a^2b^2=0$,

结合$c^2=a^2+b^2$, 得 $b^2=3a^2$, $c=2a$,

代入 ③, 得$\triangle OPQ$的外接圆方程: $x^2+y^2+ax+\sqrt{15}ay=0$,

由$|PQ|=4$知, 此圆半径为2, 得$a^2=1$,

从而双曲线方程为$x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$.

3. 等价转化为"$\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-1$"

在OA、OB都不与坐标轴平行的情况下, 将$OA\perp OB$等价形式保留为$k_{OA}\cdot k_{OB}=-1$即$\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-1$. 联立直线和二次曲线方程, 消去常数项, 得到关于$\dfrac{y}{x}$的一元二次方程, 只需令其两根$\dfrac{y_1}{x_1}$、$\dfrac{y_2}{x_2}$的乘积等于-1.

例3 题同例1.

解法3: 设双曲线、直线PQ的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $y=\sqrt{\dfrac{3}{5}}(x-c)$. 联立, 消去常数项, 得 $\dfrac{c^2x^2}{a^2}-\dfrac{c^2y^2}{b^2}=\left(x-\sqrt{\dfrac{5}{3}}y\right)^2$,

$\left(\dfrac{c^2}{b^2}+\dfrac{5}{3}\right)\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-2\sqrt{\dfrac{5}{3}}\left(\dfrac{y}{x}\right)+\left(1-\dfrac{c^2}{a^2}\right)=0$.

由$OP\perp OQ$知$\dfrac{y_1}{x_1}\cdot\dfrac{y_2}{x_2}=-1$,

例析命题在特殊情形下的解题功能

200940 上海市吴淞中学 贺明荣

在数学解题中, 虽然命题在特殊情况下所得的结论, 在一般情况下不一定都成立, 但是, 很多问题的特殊情形(如特殊值、特殊位置、特殊图形、特例等)常能起到启迪思维、纠正错误、优化过程、培养能力之功效.

1. 铺垫功能

某些数学命题的证明, 往往需要其特殊情形的解决, 而其它情形的解决则需"特殊情形的解决"这一基础, 因此, 它起着铺垫的作用.

例1 设$\mathbf{Q}$是全体有理数的集合, 求所有适合下列条件的从$\mathbf{Q}$到$\mathbf{Q}$的函数f:

(1) $f(1)=2$;

(2) 对$\mathbf{Q}$中所有的x、y, $f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)-f(x+y)+1$.

分析: 注意到$f(x)$的定义域为$\mathbf{Q}$, 故可首先考虑特殊情形:求出当$x\in\mathbf{Z}$时, $f(x)$的表达式, 然后再求当$x=\dfrac{n}{m}\in\mathbf{Q}$ (m、$n\in\mathbf{Z}$, $m\neq 0$)时, $f(x)$的表达式.

解: (I) 令$y=1$, 则由(2)得

$$f(x)=f(x)\cdot f(1)-f(x+1)+1, \quad ①$$

将$f(1)=2$代入①式并化简得

$$f(x+1)=f(x)+1,$$

从而, 当n为正整数时,

$$f(x+n)=f(x+n-1)+1$$
$$=f(x+n-2)+2=\cdots=f(x)+n;$$

当n为负整数时,

$\therefore \dfrac{c^2}{b^2}+\dfrac{5}{3}=-\left(1-\dfrac{c^2}{a^2}\right)$, 结合$c^2=a^2+b^2$, 得$b^2=3a^2$, $c=2a$,

以下同解法1.

4. 等价转化为"设$A(x,y)$、$B(-\lambda y,\lambda x)$或$B(\lambda y,-\lambda x)$"

若$OA\perp OB$且$|OB|=\lambda^2|OA|$, 则可设$A(x,y)$、$B(-\lambda y,\lambda x)$或$B(\lambda y,\lambda x)$, 这由$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$可以得到.

例4 (1994年全国高考题)已知直线l过坐标原点, 抛物线C的顶点在原点, 焦点在x轴正半轴上, 若点$A(-1,0)$和$B(0,8)$关于l的对称点在C上, 求直线l和抛物线C的方程.

解: 如图1, 设$y^2=2px$ ($p>0$), 点A和B关于l的对称点为A'、B'.

$OA\perp OB$, $OA'\perp OB'$, $|OB|=8|OA|$, $|OB'|=8|OA'|$.

设$A'(2pt^2,2pt)$ ($t<0$),

则$B'(-16pt,16pt^2)$.

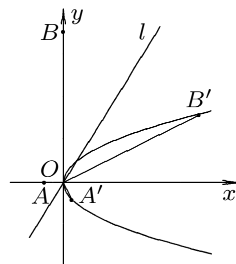


图1

代入$y^2=2px$, 得

$$(16pt^2)^2=2p(-16pt),\ t=-\frac{1}{2},$$

$$\therefore A'\left(\frac{p}{2},-p\right),$$

$$|OA'|^2=\frac{p^2}{4}+p^2=|OA|^2=1,$$

$$p=\frac{2}{5}\sqrt{5},$$

$\therefore$ 抛物线C的方程为$y^2=\dfrac{4}{5}\sqrt{5}x$,

由$A'\left(\dfrac{1}{5}\sqrt{5},-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}\right)$和$A(-1,0)$求得直线$l$的方程$y=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}x$.

$$f(x+n)=f(x+n+1)-1$$
$$=f(x+n+2)-2=\cdots$$
$$=f[x+n+(-n)]-(-n)=f(x)+n.$$

因此, 当n为整数时,

$$f(x+n)=f(x)+n. \quad ②$$

在 ② 中, 令$x=1$即得$f(1+n)=f(1)+n=2+n$, 亦即$f(n+1)=n+2$. ③

(Ⅱ) 对任意有理数 $\dfrac{n}{m}$ (这里m、$n\in\mathbf{Z}$, $m\neq 0$), 我们在 (2) 中令$x=m$, $y=\dfrac{n}{m}$ 便得

$$f(n)=f(m)\cdot f\left(\frac{n}{m}\right)-f\left(m+\frac{n}{m}\right)+1,$$

再由 ②、③ 进一步可得

$$n+1=(m+1)f\left(\frac{n}{m}\right)-f\left(\frac{n}{m}\right)-m+1,$$

化简得$mf\left(\dfrac{n}{m}\right)=n+m$, 也就是

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}+1,$$

因此, 所求的函数是惟一的, 即$f(x)=x+1$, $x\in\mathbf{Q}$.

它显然满足条件 (1) 和 (2).

评注: 本例的情形 (Ⅱ) 是通过转化情形 (I) 获得解决的, 情形(I) 起了铺垫作用.

2.引路功能

某些数学问题, 其题意较为含蓄, 特别是一些复杂的开放性问题(如, 探索性问题等), 若能用满足命题的某种特殊情形进行分析, 往往能迅速发现解题目标, 摸清解题思路, 特殊情形起着探索和引路的作用.

例2　已知数列$\{a_n\}$的通项为$a_n=n(n+1)^2$, 问: 是否存在等差数列$\{b_n\}$, 对一切正整数n都有

$$a_n=1\cdot b_1+2\cdot b_2+3\cdot b_3+\cdots+n\cdot b_n$$

成立? 证明你的结论.

分析: 本题中的等式欲对一切正整数n都成立, 那么, 特别地对$n=1$、2、3也成立, 于是, 我们以此为突破口求解.

解: 假设满足题目要求的等差数列$\{b_n\}$存在, 则

$a_1=4=1\cdot b_1$, $\therefore b_1=4$;

$a_2=18=1\cdot b_1+2\cdot b_2$, $\therefore b_2=7$;

$a_3=48=1\cdot b_1+2\cdot b_2+3\cdot b_3$, $\therefore b_3=10$;

$\cdots\cdots$,

猜想 $b_n=3n+1$,

可用数学归纳法证明: 对一切正整数n,

$$a_n=1\cdot b_1+2\cdot b_2+3\cdot b_3+\cdots+n\cdot b_n$$

成立. 其中$a_n=n(n+1)^2$, $b_n=3n+1$, 证略.

评注: 众所周知, 这类问题常可按"归纳→猜想→证明" 的方式进行分析, 而这里的"归纳"实际上就是从特殊情形入手, 并将引向一般的情形.

3.联想功能

某些数学问题往往有其特殊的结构或背景, 若紧紧扣住其特征, 充分利用特殊情形进行联想, 可使问题由难变易, 同时对问题的解答也起着导向作用.

例3　函数$f(x)$的定义域关于原点对称, 且满足以下条件:

① x_1、x_2是$f(x)$定义域中的数, 且$f(x_1-x_2)=\dfrac{f(x_2)\cdot f(x_1)+1}{f(x_2)-f(x_1)}$;

② $f(a)=1\,(a>0)$;

③ 当$0<x<2a$时, $f(x)>0$.

(1) 判定$f(x)$的奇偶性;

(2) 判定$f(x)$是否为周期函数, 若是周期函数, 求出周期.

分析: 由条件 ① 容易联想到特殊情形: 两角差的余切公式

$$\cot(\alpha-\beta)=\frac{\cot\beta\cdot\cot\alpha+1}{\cot\beta-\cot\alpha}.$$

由$\cot\dfrac{\pi}{4}=1$, 猜想$a=\dfrac{\pi}{4}$, 不难发现题设条件类似余切函数的运算法则和性质, 故将题中的抽象函数 $f(x)$ 退到特殊情形 $f(x)=\cot x$, 由此猜想题中的结论:

(1) $f(x)$ 为奇函数;

(2) $y=\cot x$的周期为$\pi=4\cdot\dfrac{\pi}{4}$, 则猜想$f(x)$的周期为$4a$.

证明: (1) 令$x=x_1-x_2$, 则$-x=x_2-x_1$, $\because f(x)$的定义域关于原点对称, $\therefore -x$也在定义域内.

$$\therefore f(-x)=f(x_2-x_1)=\frac{f(x_1)\cdot f(x_2)+1}{f(x_1)-f(x_2)}$$

$= -f(x_1 - x_2) = -f(x)$,

故 $f(x)$ 为奇函数.

(2) ∵ $f(x+a)$

$$= \frac{f(x)\cdot f(-a)+1}{f(-a)-f(x)} = \frac{-f(x)\cdot f(a)+1}{-f(a)-f(x)}$$

$$= \frac{1-f(x)}{-1-f(x)} = \frac{f(x)-1}{f(x)+1},$$

$f(x+2a) = f[(x+a)+a]$

$$= \frac{f(x+a)-1}{f(x+a)+1} = \frac{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}-1}{\frac{f(x)-1}{f(x)+1}+1}$$

$$= \frac{-2}{2f(x)} = -\frac{1}{f(x)},$$

则 $f(x+4a) = f[(x+2a)+2a]$

$$= -\frac{1}{f(x+2a)} = f(x),$$

故 $f(x)$ 是周期函数, 且周期为 $4a$.

评注: 在解题过程中, 将生疏与熟悉进行类比联想, 有利于启迪思维, 找到问题的具体模型, 这里的抽象函数 $f(x)$ 类比联想到特殊情形 $y = \cot x$.

4. 筛选功能

在数学解题中, 可利用特殊情形把不合题意的结果去除, 而把符合条件的结果保留, 特殊情形起着筛选的作用.

例 4　设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上, 对任意实数 m、n 都有 $f(m)+f(n) = f(m+n) - m\cdot n - 1$, 若 $f(1) = 1$, 则满足 $f(x) = x$ 的整数 x 有多少个?

分析: 这类抽象函数问题的基本解法是对已给恒等式赋值, 然后根据所得结果再进行推理论证.

解: 将 $m = 1$ 代入已知式可得:

$f(1) + f(n) = f(1+n) - n - 1$,

∴ $f(n+1) = f(n) + n + 2$,

由此递推式便知, 当 n 为正整数时, 均有 $f(n) > 0$, 且 $f(n+1) > n+2 > n+1$, 即, $f(n+1) > n+1$,

因此, 方程 $f(x) = x$ 没有大于 1 的整数解;

又 $f(n) = f(n+1) - (n+2)$, 经计算, 得 $f(0) = -1$, $f(-1) = -2$, $f(-2) = -2$, $f(-3) = -1$, $f(-4) = 1$.

从而 $f(-4) = 1 > 0$, 又当 $n < -4$ 时, 均有 $-(n+2) > 2$, 这样对 $n < -4$, 均有 $f(n) > 0$,

∴ 方程 $f(x) = x$ 也没有小于 -3 的整数解.

综上所述, 满足 $f(x) = x$ 的整数 x 只有 2 个, 即 $x = 1$、-2.

评注: 上述解题过程中所出现的特殊情形, 起到了既“剔除”又“选拔”之功效.

5. 优化功能

很多数学问题的解法可谓“条条道路通罗马”, 但在求解选择题、填空题这类题目, 或需要否定一个命题, 为了使思维活动更“有效”(快速、准确), 往往可借助特殊情形, 以找到解题的捷径, 得到正确的结果.

例 5　函数 $f(x) = M\sin(\omega x+\varphi)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[a,b]$ 上是增函数, 且 $f(a) = -M$, $f(b) = M$, 则函数 $g(x) = M\cos(\omega x+\varphi)$ 在 $[a,b]$ 上……………………………………………( )

(A) 是增函数;　　(B) 是减函数;

(C) 可以取得最大值 M;

(D) 可以取得最小值 $-M$.

分析: 解本题时, 主要是认真考察函数 $f(x)$ 的性质, 抓住函数 $f(x)$ 的结构特征, 利用其特殊情形, 去除明显错误的选项.

解: 取特殊情形: $f(x) = \sin x$, 这里 $M = 1$, $\omega = 1$, $\varphi = 0$, $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = \frac{\pi}{2}$.

从而 $g(x) = \cos x$, 显然正确答案为 (C).

评注: 要证明一个数学命题的正确性, 必须经过严密的数学推理过程, 而要说明一个数学命题是错误的, 只需举出一个例子即可,本题实际上就是利用反例(即问题的特殊情形)加以否定“明显”错误的选项.

6. 批判功能

发展学生的思维能力, 特别是对思维品质的培养, 是数学教学的一项重要任务, 思维的批判性是思维品质的一种, 它具有善于发现问题、提出疑问、辨别是非等特征. 对于一个问题的解答, 运用特殊情形可检验答案是否正确,

数学解题正确结论下的“迷雾”

313000 浙江省湖州市第一中学 黄加卫 徐晓红

波利亚指出：通过研究解题方法，我们可以看到数学的第二个侧面，也就是看到“处于发现过程中的数学”．因此，波利亚把“解题”作为培养学生才能和教会他们思考的一种手段和途径，并且强调解题训练的目的是引导学生开展智力活动，提高数学才能．要达到这一目的，就应高度重视解题过程中的合情推理，强调思维的严谨性和解题步骤的严密性．但笔者发现有些学生在解题过程中，虽然结论正确，但由于对概念理解不透彻或采取不正确的解题策略等原因，导致解题过程中出现“危机”或“失败”，若学生本人并未发现，以为自己对了，那危险就更大了！下面就其形成原因及纠错、反思等方面作如下阐述：

一、由于概念性错误导致解题“偏差”

例1　通过对表一的阅读和分析，请思考一下如何由事件的频率来确定其概率值．

表一：抛掷硬币试验结果表

抛掷次数 (n)	2048	4040	12000	24000	30000	72088
正面向上次数（频数 m）	1061	2048	6019	12012	14984	36124
正面向上频率 $\left(\dfrac{m}{n}\right)$	0.5181	0.5069	0.5016	0.5005	0.4995	0.5011

错解：设事件A：抛掷硬币试验正面向上，则$P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m}{n}=0.5$．

1．形成原因和纠错：有的学生对数学概念的形成、概念的内涵和外延不甚了解或一知半解，造成对概念的“假性理解”，因此在解决有关这些概念的题目时，容易发生“偏差”．概率的统计学描述基于在不变条件下的大量重复试验中，试验结果的某种“稳定性”．这种“稳定性”与极限的定义容易混淆；虽然以上错解所得结论与正确结论相同；但我们不能由此推出，当试验次数$n\to+\infty$时，$\dfrac{m}{n}\to$定值0.5，这是毫无道理的，经不起极限定义的检验的！

2．反思：一般说来，学生进入新的知识领

如果发现不对，将引导我们去追寻问题的错误之所在．

例6　求函数$f(x)=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$的（最小正）周期．

分析：很多学生是这样求解的：$f(x)=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\tan 2x$，得$T=\dfrac{\pi}{2}$．

上述过程从表面上看，似乎没有问题，但如果给予x的特殊值（特殊情形）$x=0$时，对题目中的$f(x)=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$有$f(0)=0$．如果周期是$\dfrac{\pi}{2}$，那么应有$f\left(0+\dfrac{\pi}{2}\right)=f(0)=0$，显然$x=\dfrac{\pi}{2}$时$f(x)=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$中的$\tan x$无意义，可知解答是错误的．错误的原因是变形扩大了原函数的定义域，从而影响其周期．

解：考虑到原函数的定义域，应有如下变形：$f(x)=\tan 2x$，这里$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}$且$x\neq k\pi\pm\dfrac{\pi}{4}$，$(k\in\mathbf{Z})$．

注意到$\tan 2x$的周期为$\dfrac{\pi}{2}$，π，$\dfrac{3\pi}{2}$，$\cdots$，但由于$f(0)=0$有意义，而$\dfrac{\pi}{2}$不在$f(x)$的定义域内，故$f\left(0+\dfrac{\pi}{2}\right)\neq f(0)$，因此$\dfrac{\pi}{2}$不是$f(x)$的周期，从而函数$f(x)$的（最小正）周期为$T=\pi$．

评注：在数学解题中，验证题解的方法很多，而利用特殊情形检验是较为有效的方法之一．

总之，在数学解题教学中，视例题为载体，恰当地运用特殊情形的解题功能去构建思维空间，将学生的“被动接受”转化为“主动探究”，以达到发展智力、培养能力之目的．

域时, 常常会发生认识上的负迁移作用, 把已有的观念作为绝对真理, 强套新知识, 这往往会发生错误. 所以教师应采用多种方法和手段指导学生主动地建构正确的概念, 处理好新旧知识之间的联系和区别.

二、由于习惯性"经验"导致解题"危机"

例2 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)=8$, $\lim\limits_{n\to\infty}(6a_n-b_n)=1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+b_n)$ 的值.

错解: 由 $\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)=8,\\ \lim\limits_{n\to\infty}(6a_n-b_n)=1,\end{cases}$

得 $\begin{cases}3\lim\limits_{n\to\infty}a_n+4\lim\limits_{n\to\infty}b_n=8, & (1)\\ 6\lim\limits_{n\to\infty}a_n-\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1, & (2)\end{cases}$

$(1)\times2-(2)$ 得: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{15}{9}$, 并求得: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{4}{9}$.

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+b_n)=3\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{12}{9}+\dfrac{15}{9}=3.$

1. 形成原因和纠错: 有的学生不能透彻理解数学公式和法则, 浮于表面, 以偏盖全, 以自己不正确、不完善的"经验"推而广之, 从而形成解题"危机". 本题学生对"和的极限等于极限的和"的结论十分熟悉, 受其影响, 产生了以上错误解法, 实际上是受思维定势的消极影响, 错误的原因是: 没有对 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 的存在加以说明. 但是由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 的确存在, 故以上错解所得结论与正确结论相同.

正解: 用待定系数法,

$a_n=x(3a_n+4b_n)+y(6a_n-b_n)$,

$\therefore\ a_n=\dfrac{1}{27}(3a_n+4b_n)+\dfrac{4}{27}(6a_n-b_n)$,

$$\begin{aligned}\therefore\ \lim_{n\to\infty}a_n&=\frac{1}{27}\lim_{n\to\infty}(3a_n+4b_n)+\frac{4}{27}\lim_{n\to\infty}(6a_n-b_n)\\&=\frac{1}{27}\times8+\frac{4}{27}\times1=\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

同理得: $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{15}{9}$,

$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}(3a_n+b_n)$

$=3\lim\limits_{n\to\infty}a_n+\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{12}{9}+\dfrac{15}{9}=3.$

2. 反思: 加强学生对数学公式和法则运用条件的掌握, 对平常学生的习惯性"经验"加以分析, 强调数学知识的科学性、推理逻辑的严谨性.

三、由于过程性"跳跃"导致解题"疑问"

例3 已知二次函数 $f(x)=ax^2+bx+1$ (b是实数, a是正数), 设方程 $f(x)=x$ 的两个实根为 x_1、x_2. 如果 $0<x_1<2$, $|x_2-x_1|=2$, 求b的取值范围.

错解: 设 $g(x)=ax^2+(b-1)x+1$, 因 $g(0)=1>0$, 故 x_1 和 x_2 同号, 又 $x_1>0$, 故 $x_2>0$, 从而必有 $x_2=x_1+2\in(2,4)$. 所以

$$\begin{cases}0<x_1<2\\|x_2-x_1|=2\end{cases}\overset{(1)}{\Longrightarrow}\begin{cases}0<x_1<2\\2<x_2<4\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow\begin{cases}g(2)=4a+2(b-1)+1<0\\g(4)=16a+4(b-1)+1>0\end{cases}$$

$$\Longrightarrow g(4)-4g(2)>0\Longleftrightarrow b<\frac{1}{4}.$$

1. 形成原因和纠错: 数学教学常以解题为核心, 解题过程的正确与否, 能真实反映出学生思维的严谨性, 在解题过程中, 思路受阻或者说明不清的情况下, 易发生解题过程不完整或解题过程发生"跳跃"的错误. 以上错误解法中, 推理(1)实际上是可逆的, 故以上错解所得结论与正确结论相同, 但其并没有加以证明, 下补充其可逆性.

补充: 当 $b<\dfrac{1}{4}$ 时, 必存在 $a>\dfrac{1}{8}$, 使 $b-1=-\sqrt{4a^2+4a}\Longrightarrow\dfrac{\sqrt{(b-1)^2-4a}}{a}=2$,

即 $|x_2-x_1|=2$, 而此时

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{-(b-1)-\sqrt{(b-1)^2-4a}}{2a}\\&=\frac{\sqrt{4a^2+4a}-2a}{2a}\\&=\sqrt{1+\frac{1}{a}}-1\in(0,2).\end{aligned}$$

故可逆性得证.

2. 反思: 在平时的课堂教学中应强调解题过程的严谨性, 通过正反两方面类比, 深化思维、提高能力, 加强解题过程中的防范意识, 培养学生养成良好的解题习惯.

四、由于遗漏性"失误"导致解题过程发生"缺失"

例4 集合$A=\{(x,y)|y=x^2+mx+2\}$, $B=\{(x,y)|x-y+1=0,0\leqslant x\leqslant 2\}$, $A\cap B\neq\varnothing$, 求实数m的取值范围.

错解: 设$f(x)=x^2+(m-1)x+1$, $f(0)=1>0$.

(1) 若$f(x)=0$在[0,2]内有且只有一个解, 则$f(2)<0$, 则$m<-\dfrac{3}{2}$.

(2) 若$f(x)=0$在[0,2]内有两个解, 则有

$$\begin{cases}\Delta\geqslant 0,\\ 0<-\dfrac{m-1}{2}<2,\\ f(2)\geqslant 0.\end{cases}$$

即$\begin{cases}m\geqslant 3\text{或}m\leqslant -1,\\ -3<m<1,\\ m\geqslant -\dfrac{3}{2},\end{cases}$

解得: $-\dfrac{3}{2}\leqslant m\leqslant -1$.

1. 形成原因和纠错: 在分析、解决问题的过程中, 由于学生对问题考虑不周, 往往会遗漏某些过程或遗漏解答. 上题解答过程应补充: (3) $f(2)=0$且$-\dfrac{m-1}{2}>2$才算完整.

因为(3)的结果是空集, 故错解所得的答案与正确答案相同.

2. 反思: 数学解题不仅是求结果, 更要重过程, 这就应该让学生在解题过程中经过成功或失误、体验和反思, 不断进行归因分析, 积累自己的经验, 养成慎密思考, 逐步推敲的解题习惯.

五、由于“歪打正着”造成解题失败

例5 已知动点$P(x,y)$到定点$A(3,4)$的距离比P到x轴的距离多一个单位, 求动点P的轨迹方程.

错解: 由题意得:

$\sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}=y+1$ ··········· ①

化简得: $x^2-6x-10y+24=0$ 即所求.

1. 形成原因和纠错: 以上错解都把点P的纵坐标与点P到x轴的距离两者混淆了, 但此题隐含$y>0$这样的条件, 故解答恰好对了. 应把 ① 式右边的y改成$|y|$, 然后进行化简.

2. 反思: 要获得广泛的数学知识和提高数学才能, 就应该夯实基础, 充分利用问题中的条件, 不能一叶障目、片面理解.

六、由于人为增加条件或使用没有证明的结果而造成“潜在假设”

例6 若$x+y+z=1$, 求证: $x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{3}$.

错解: 设$x=\dfrac{1}{3}-t$, $y=\dfrac{1}{3}-2t$, $z=\dfrac{1}{3}+3t\,(t\in\mathbf{R})$, 则 $x^2+y^2+z^2=\left(\dfrac{1}{3}-t\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}-2t\right)^2+\left(\dfrac{1}{3}+3t\right)^2=\dfrac{1}{3}+14t^2\geqslant\dfrac{1}{3}$. 当$t=0$时等号成立.

例7 设复数z满足$|z-\mathrm{i}|=1$, 且$z\neq 0$, $z\neq 2\mathrm{i}$, 又复数ω使得$\dfrac{\omega}{\omega-2\mathrm{i}}\cdot\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z}$为实数, 问复数$\omega$在复平面上所对应的点$Z$的集合是什么图形, 并说明理由.

错解: ∵ $\dfrac{\omega}{\omega-2\mathrm{i}}\cdot\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z}\in\mathbf{R}$,

∴ $\dfrac{\omega}{\omega-2\mathrm{i}}\cdot\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z}=\overline{\dfrac{\omega}{\omega-2\mathrm{i}}\cdot\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z}}$,

∴ $\dfrac{\omega}{\omega-2\mathrm{i}}\cdot\dfrac{z-2\mathrm{i}}{z}=\dfrac{\overline{\omega}}{\overline{\omega}+2\mathrm{i}}\cdot\dfrac{\overline{z}+2\mathrm{i}}{\overline{z}}$,

整理, 得$\dfrac{\omega(\overline{\omega}+2\mathrm{i})}{\overline{\omega}(\omega-2\mathrm{i})}=\dfrac{z(\overline{z}+2\mathrm{i})}{\overline{z}(z-2\mathrm{i})}$ ·········· ①

比较这个等式, 可得$\omega=z$.

∵ $|z-\mathrm{i}|=1$, $z\neq 2i$,

∴ $|\omega-\mathrm{i}|=1$, $\omega\neq 2\mathrm{i}$.

1. 形成原因和纠错: 有的学生在解题过程中, 在不知觉的情况下增加了题目的条件, 或者凭直觉想当然地使用了没有证明的结果, 从而导致“潜在假设”. 例6的问题出在上述证明中, 变量代换实际上增加了条件:

$$y=-\frac{1}{3}+2x,\quad z=\frac{4}{3}-3x.$$

例7由步骤 ① 的结构相似得出$\omega=z$, 而这个结论是错误的. 这两题结论虽然是正确的, 但推理显然不能成立!

例6正解: 设$x=\dfrac{1}{3}+\alpha$, $y=\dfrac{1}{3}+\beta$, $z=\dfrac{1}{3}+\gamma$, 其中α、β、$\gamma\in\mathbf{R}$, 且$\alpha+\beta+\gamma=0$, 则

(下转第2–17页)

能否在中考试卷中增加一道面向学习困难生的附加题?

215003 江苏省苏州市教育局教研室 罗 强

众所周知, 评价改革是制约课程改革的一个瓶颈, 随着课程改革的不断推进, 2005年全国将有8 ~ 10个省市区参加针对新课程的中考, 占考生总数的25% ~ 30%. 中考命题改革能否很好地体现课程改革的理念, 从而促进素质教育的实施和课程改革的推进, 确实是一项迫在眉睫而又难度很大的工作. 根据新课程的评价要求, 结合对苏州市近几年中考情况的分析, 笔者提出一个设想:能否在中考试卷中增加一道面向学习困难生的附加题? 由于中考命题改革是事关千家万户的大事, 下文将对这一设想进行具体的论证.

1. 提出这个设想的由来

苏州市历年的中考是初中毕业考试、升学考试两考合一, 因此, 中考既具有毕业考试的水平考试的检测功能, 又具有升学考试的选拔功能. 根据我市教育发展的需要及两考合一的特点, 教育行政部门提出的预计考查目标是:试卷的平均分在85分 ~ 90分之间(满分120分), 即得分率为72% ~ 75%, 同时又有较好的区分度, 即期望大部分考生能及格, 及格率($\geqslant$ 72分)为85% ~ 90%, 又能适当控制优秀率, 优秀率($\geqslant$ 108分)在30%左右.

目前, 苏州市已普及高中教育, 每年的初中毕业生中都有97%以上升入高中段学校学习, 从有利于普及义务教育这个角度, 要让各个层次的学生都能得到发展, 要让升入高中的学生都是合格的初中毕业生, 因此提出了要90%的合格率.

目前, 苏州市升入高中段学校学习的学生中, 普中和职中的学生人数比例约为1:1.1, 即有46%左右的初中毕业生将升入普通高中, 从有利于高中段教育这个角度, 要为学生进一步的发展打下基础, 因此提出了要30%的优秀率.

但从苏州市近几年中考考试的结果来看, 中考作为毕业水平考试, 合格率偏低, 作为选拔考试, 优秀率又偏高, 这就是我们在中考命题中所面临的一个难以协调的两难问题.

不是合格率偏低, 就是优秀率偏高, 实际上也反映了在一张统一的中考试卷中考查学生能力与考查学生双基确实很难同时兼顾.

义务教育的普及化使得学校教育中的学生分化现象更为普遍甚至更为严重, 统一性的考试, 尤其是具有选拔功能的统一性考试, 更有利于优秀学生展示自己的数学水平与数学能力, 而不利于学习困难生展示自我. 《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》指出: "第三学段学生的个性特征更加凸显, 评价应充分考虑这种差异, 努力使每一个学生都能得到成功的体验." 既要让学习优秀生展示能力, 又要让学习困难生体验成功, 这是目前的中考命题所面临的一个两难问题.

总体来说, 目前的数学教学与数学评价对学习优秀生关注较多, 而对学习困难生的关注不够, 特别是在考试中, 学习困难生更容易受到打击. 能否尊重学生之间的个体差异, 让"不同的人在数学上得到不同的发展" 这一基本理念在考试评价中也能得到较好的体现, 特别是对学习困难生, 能否通过考试评价让他们看到自己的进步, 让他们也能获得成功的喜悦, 从而激发新的学习积极性, 这是中考命题中的一个难题, 而如果对学习困难生的政策倾斜能够

不降低整份试卷对数学的要求, 能够不影响学习优秀生充分展示自己的数学能力, 就难上加难.

《2003年全国初中毕业、升学考试数学学科评价报告》指出: "加强组卷技术与开卷考试方式的研究. 探索改变过去用每道题目均为考生必答题组卷的做法,探索新的组卷方式, 在不危及考试公平性的前提下, 为考生更能充分发挥自己的水平提供方便. 例如, 可以探索和完善增加等值题目供学生进行选择答题的方法; 也可以探索设计由学生自己选择解答起点的试卷, 即学生可以只做试卷的部分题目, 但不影响对学生在数学学科方面成绩的评价". 这就启示我们能否从组卷技术的角度来寻找破解这个两难问题的途径, 设置附加题这种做法可以给考生一些选择的权利, 因此是一个可以考虑的方向.

2. 近几年高考卷、中考卷中的附加题

例1 2003年普通高等学校招生全国统一考试数学 (理工农医类) 第22题 (本小题满分12分, 附加题4分).

(I) 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^t+2^s|0\leqslant s<t$, 且 $s、t\in\mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 即 $a_1=3$, $a_2=5$, $a_3=6$, $a_4=9$, $a_5=10$, $a_6=12$, $\cdots$.

将数列 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大, 左小右大的原则写成如下三角形数表:

3

5 6

9 10 12

— — — —

— — — — —

……

(i) 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数;

(ii) 求 a_{100}.

(Ⅱ) (本小题为附加题, 如果解答正确, 加4分, 但全卷不超过150分.)

设 $\{b_n\}$ 是集合 $\{2^t+2^s+2^r|0\leqslant r<s<t$, 且 $r、s、t\in\mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列, 已知 $b_k=1160$, 求 k.

例2 2003年福建省三明市中考第27题 (本题14分).

已知: 如图1, E、F、G、H 按照 $AE=CG$, $BF=DH$, $BF=nAE$ (n 是正整数) 的关系, 分别在两邻边长 a、na 的矩形 $ABCD$ 各边上运动. 设 $AE=x$, 四边形 $EFGH$ 的面积为 S.

(1) 当 $n=1$、2时, 如图2、3, 观察运动情况, 写出四边形 $EFGH$ 各顶点运动到何位置, 使 $S=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}$;

(2) 当 $n=3$ 时, 如图4, 求 S 与 x 之间的函数关系式 (写出自变量 x 的取值范围), 探索 S 随 x 增大而变化的规律; 猜想四边形 $EFGH$ 各顶点运动到何位置, 使 $S=\frac{1}{2}S_{矩形ABCD}$;

(3) 当 $n=k$ ($k\geqslant1$) 时, 你所发现的规律和猜想是否成立? 请说明理由.

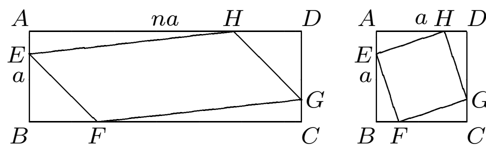


图 1　　图 2

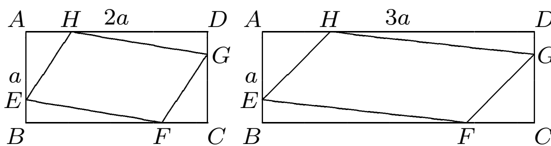


图 3　　图 4

(考生注意: 你在本题研究中, 如果能发现新的结论并说明结论正确的理由, 将酌情另加3–5分.)

"数学学科2003年初中毕业、升学考试评价课题组"对本题的点评: "本题可以酌情另加3–5分, 实际上是告诉学生本题将采用开放的评分标准. 评分标准的开放, 反映了考试对学生创新活动的尊重, 这种题目不仅真正有利于激发学生的积极性与创新意识, 而且对于平时教学也具有积极的导向意义".

3. 如何实施这个设想, 它有什么特点

设想在试卷的最后增加一道8分的附加题, 该题难度系数约为0.92, 并给出如下提示语:

本题为附加题, 如果你全卷得分不满72分,

则本题的得分将计入全卷总分, 但全卷总分不超过72分; 如果你全卷得分已经达到或超过72分, 则本题的得分将不计入全卷总分.

友情提示: 如果你觉得自己的全卷得分已经超过72分, 请你将剩下的时间用在前面试题的解答上.

在《考试说明》中用如下文字进行说明: 为使更多的学生能体验成功, 试卷最后将设置一道附加题, 如果考生全卷得分不满72分, 则该题的得分将计入全卷总分, 但全卷总分不超过72分; 如果考生全卷得分已经达到或超过72分, 则该题的得分将不计入全卷总分.

前面所列举的高考卷和中考卷中的两个附加题的例子都是面向学习优秀生的, 实际上是"奖优题", 是锦上添花, 从命题意图来看, 是希望为10%左右的优秀学生展示才能创造条件, 从实际效果来看, 优秀学生为了将有限的时间用在更容易解决的正式题中, 有可能选择不做, 从而使得这样的附加题形同虚设. 而面向学习困难生的附加题, 实际上是"扶贫题", 是雪中送炭, 是为学习困难生创设更多获得成功的机会, 是希望他们在考试时不再陪考, 这种扶贫不是无原则的"施舍", 不是人人有份的"救济", 而是需要学习困难生通过"辛勤劳动"来"脱贫", 同时"全卷总分不超过72分"保证了这种"脱贫"不会使他"致富", 不会产生新的不公平.

4. 这个设想如果实施对考试会产生什么影响

以苏州市2004年的中考抽样统计数据为参照, 估测一下如果在苏州市2004年中考试卷中增加一道"扶贫类"的8分的附加题, 会对考试的结果带来什么影响.

对平均分的影响很小, 对优秀率则没有影响. 加一道8分的附加题, 以实际难度系数0.65来估算, 则平均得分约为5.2分, 如果全部计入总分, 以有效得分的人数占10%来估算, 可以将全卷平均分提高0.52分, 考虑到超出72分的分数将不计入总分, 估计可以将全卷平均分提高0.30分, 这个结果不会使全卷平均分产生大的提高.

可以适当提高及格率. 苏州市2004年的中考抽样结果显示, 得分在60分～71分之间的人数约占5.38%, 由于附加题的加分, 估计其中可以有3%左右的学生可以从原来的不及格变成及格, 即可使得2004年的合格率提高3个百分点, 由原来的83.76%提高到86.7%左右.

5. 这个设想如果实施对教学会产生什么影响

这样的举措对部分学生的考试心理和应试策略将带来一定的影响. 这样的举措首先可以增强学习困难生的考试信心, 同时, 对20%左右的考生而言, 虽然多了一份证明自己的机会, 但机遇与风险同在, 由于学生事先并不能知道自己在本次考试中可能会考多少分数, 因此, 必须在考试的后期先对自己本次考试的得分情况做一个估计, 再决定做还是不做附加题, 即先做一个自我评价, 再做一个逻辑决策, 这样就为这部分学生营造了一个仿照人生选择的良好情景. 《全日制义务教育数学课程标准(实验稿)》指出: "评价的主要目的是为了全面了解学生的数学学习历程, 激励学生的学习和改进教师的教学; …… 要关注学生数学学习的水平, 更要关注他们在数学活动中所表现出来的情感与态度, 帮助学生认识自我, 建立信心." 显然, 由于考生考试临场发挥的不确定性和考试内容的可选择性, 就需要一部分考生临场去分析和决策, 因此, 这样的举措就包含了对学生的情感、态度和价值观的考查.

这样的举措对部分教师的教学和应试指导将带来一定的影响. 对面向学习困难生的教师而言, 这样的举措首先可以增强他们的教学信心, 而这种信心将传递给学习困难生. 其次, 这样的举措也可以引导教师因材施教. 由于考试时学生需要先做一个自我评价, 再做一个逻辑决策, 因此教师不仅仅要教学生学会数学, 还要教学生学会决策, 学会拼搏进取, 这就使得考试能发挥育人的效果, 从而具有了一种全新的发展性功能.

(下转第2–9页)

2004年"游戏型"中考题介绍

050800 河北省石家庄市正定镇中学 仝树霞

2004年的中考题中出现了不少的"游戏"型数学试题, 即把学生们在生活中爱玩的游戏放到了中考题中, 给紧张的考试增添了不少的乐趣.

一、扑克牌游戏

例1 (2004年河北省)扑克牌游戏:

小明背对小亮, 让小亮按下列四个步骤操作:

第一步: 分发左、中、右三堆牌, 每堆牌不少于两张, 且各堆牌现有的张数相同;

第二步: 从左边一堆拿出两张, 放入中间一堆;

第三步: 从右边一堆拿出一张, 放入中间一堆;

第四步: 左边一堆有几张牌, 就从中间一堆拿几张牌放入左边一堆.

这时, 小明准确说出了中间一堆牌现有的张数. 你认为中间一堆牌现有的张数是____.

分析: 设经过第一步操作后, 三堆牌都有x张, 经过第二步操作后, 中间一堆有$(x+2)$张, 左边一堆有$(x-2)$张, 经过第三步操作后, 中间一堆有$(x+3)$张, 经过第四步操作后, 中间一堆还有$[(x+3)-(x-2)]$张, 即5张.

二、闯关游戏

闯关游戏规则

图1所示的面板上，有左右两组开关．每一组中的两个按钮均分别控制一个灯泡和一个发音装置．同时按下两组中各一个按钮；当两个灯泡都亮时闯关成功；当按错一个按钮时，发音装置就会发出"闯关失败"的声音．

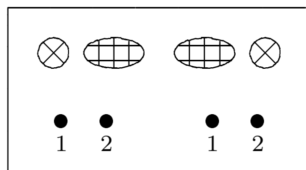


图1

例2 (2004年河北省课程改革实验区)依据闯关游戏规则, 请你探究"闯关游戏"的奥秘:

(1)用列表的方法表示有可能的闯关情况;

(2)求出闯关成功的概率.

解: (1)所有可能的闯关情况列表表示如下:

右边按钮 / 左边按钮	2	1
1	(1, 1)	(1, 2)
2	(2, 1)	(2, 2)

(2)设两个1号按钮各控制一个灯泡,

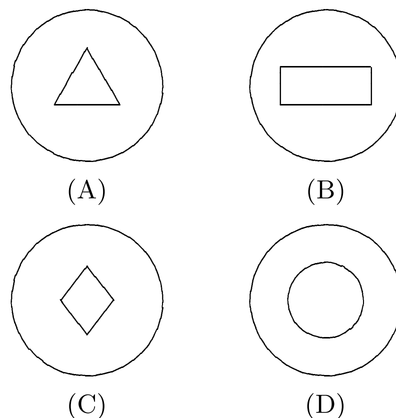
P(闯关成功) $=\frac{1}{4}$.

三、剪纸

例3 (2004年大连市)将一圆形纸片对折后再对折, 得到图2, 然后沿着图中的虚线剪开, 得到两部分, 其中一部分展开后的平面图形是……………………………………( )



图2



分析: 在图2中, 沿虚线剪下来的部分应是四边形, 并且对角线互相垂直, 所以剪下的

部分应是菱形, 另一部分展开后的平面图形是(C).

四、玩跳棋

例4 (2004年江西省) 如图3所示是跳棋盘, 其中格点上的黑色点为棋子, 剩余的格点上没有棋子, 我们约定跳棋游戏的规则是: 把跳棋棋子在棋盘内沿直线隔着棋子对称跳行, 跳行一次称为一步. 已知点A为乙方一枚棋子, 欲将棋子A跳进对方区域(阴影部分的格点), 则跳行的最少步数为……………………………( )

(A) 2步; (B) 3步; (C) 4步; (D) 5步.

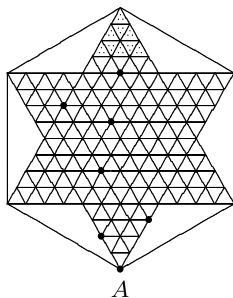


图 3

分析: 因为棋子A在棋盘内沿直线隔着棋子对称跳行, 所以棋子A可隔着它相邻的左上角的棋子对称跳行, 也可隔着它相邻右上角的棋子对称跳行, 后一种跳行步数较少, 为3步, 所以选(B).

五、数字游戏

例5 (2004年浙江省嘉兴市) 有一种数字游戏, 可以产生"黑洞数", 操作步骤如下: 第一步, 任意写出一个自然数(以下称为原数); 第二步, 再写一个新的三位数, 它的百位数字是原数中偶数数字的个数, 十位数字是原数中奇数数字的个数, 个位数字是原数的位数; 以下每一步, 都对上一步得到的数, 按照第二步的规则继续操作, 直至这个数不再变化为止. 不管你开始写的是一个什么数, 几步之后变成的自然数总是相同的. 最后这个相同的数就叫它为"黑洞数". 请你以2004为例尝试一下(可自选另一个自然数作检验, 不必写出检验过程):

2004, 一步之后变为 ____, 再变为 ____, 再变为 ____, ···, "黑洞数"是 ____.

分析: 2004中有4个偶数, 0个奇数, 它有4位数, 所以一步之后变为404, 同理再变为303, 再变为123, ······. 如此继续变下去, 所得的数都为123, 所以"黑洞数"是123.

六、踢毽子

例6 (2004年辽宁省锦州市) 某校初三学生开展踢毽子比赛活动, 每班派5名学生参加, 按团体总分多少排列名次, 在规定时间内每人踢100个以上(含100)为优秀.

下表是成绩最好的甲班和乙班5名学生的比赛数据(单位:个):

	1号	2号	3号	4号	5号	总分
甲班	100	98	110	89	103	500
乙班	89	100	95	119	97	500

经统计发现两班总分相等. 此时有学生建议, 可以通过考查数据中的其他信息作为参考.

请你回答下列问题:

(1) 计算两班的优秀率;

(2) 求两班比赛数据的中位数;

(3) 估计两班比赛数据的方差哪一个小?

(4) 根据以上三条信息, 你认为应该把冠军奖状发给哪一个班级? 简述理由.

简解: (1) 甲班的优秀率是60% (或0.6); 乙班的优秀率是40% (或0.4);

(2) 甲班5名学生比赛成绩的中位数是100个, 乙班5名学生的比赛成绩的中位数是97个;

(3) 估计甲班5名学生比赛成绩的方差小;

(4) 将冠军奖状发给甲班, 因为甲班5人比赛成绩的优秀率比乙班高、中位数比乙班大、方差比乙班小, 综合评定甲班比较好.

七、玩跷跷板

例7 (2004年江苏省泰州市) 小芳和爸爸、妈妈三人玩跷跷板, 三人的体重一共为150千克, 爸爸坐在跷跷板的一端, 体重只有妈妈一半的小芳和妈妈一同坐在跷跷板的另一端, 这时, 爸爸的那一端仍然着地. 请你猜一猜小芳的体重应小于……………………………( )

(A) 49千克; (B) 50千克;

(C) 24千克; (D) 25千克.

分析: 假如小芳和妈妈一端与爸爸的那一端处于平衡, 也即小芳和妈妈体重和与爸爸的

2005年上海市普通高等学校春季招生考试

数 学 试 卷

考生注意: 1.答卷前, 考生务必将姓名、高考座位号、校验码等填写清楚.

2.本试卷共有22道试题, 满分150分. 考试时间120分钟.

一、填空题(本大题满分48分)本大题共有12题, 只要求直接填写结果, 每题填对得4分, 否则一律得零分.

1. 方程 $\lg x^2 - \lg(x+2) = 0$ 的解集是________.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+2}{1+2+\cdots+n} =$ ________.

3. 若 $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, 且 $\alpha \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 则 $\tan\dfrac{\alpha}{2} =$ ________.

4. 函数 $f(x) = -x^2\ (x \in (-\infty, -2])$ 的反函数 $f^{-1}(x) =$ ________.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle C = 90°$, $AC = BC = 4$, 则 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} =$ ________.

6. 某班共有40名学生, 其中只有一对双胞胎, 若从中一次随机抽查三位学生的作业, 则这对双胞胎的作业同时被抽中的概率是______. (结果用最简分数表示).

~~~~~~

体重相等, 分别为75千克, 而小芳的体重只有妈妈一半, 所以小芳的体重应为25千克, 而题中说明爸爸的那一端仍然着地, 所以小芳的体重应小于25千克, 故选(D).

八、玩象棋

例8　(2004年浙江丽水)中国象棋棋盘中蕴含着直角坐标系, 如图4所示是中国象棋棋盘的一半, 棋子"马"走的规则是沿"日"形的对角线走, 例如, 图中"马"所在的位置可以直接走到点 A、B 等处.

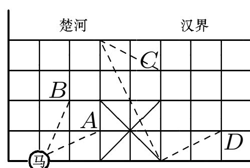


图 4

若"马"的位置在 C 点, 为了到达 D 点, 请按"马"走的规则, 在图中的棋盘上用虚线画出一种你认为合理的行走路线.

答: 行走路线如图中的虚线(此题答案不惟一).

九、荡秋千

例9　(2004重庆市)秋千拉绳长3米, 静止时踩板离地面0.5米, 某小朋友荡该秋千时, 秋千在最高处踩板离地面2米(左右对称), 则该秋千所荡过的圆弧长为 ………………………( )

(A) π 米;　　(B) 2π 米;

(C) $\dfrac{4}{3}\pi$ 米;　　(D) $\dfrac{3}{2}\pi$ 米.

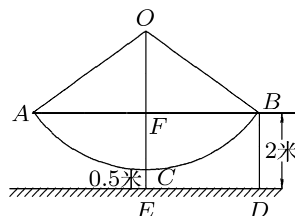


图 5

简解: 如图5, $OB = OC = 3$米, $CE = 0.5$米, $BD = 2$米,

$\therefore OF = OC + CE - BD = 3 + 0.5 - 2 = 1.5$米.

在 $\mathrm{Rt}\triangle OBF$ 中,

$\sin\angle OBF = \dfrac{OF}{OB} = \dfrac{1.5}{3} = \dfrac{1}{2}$,

$\therefore \angle OBF = 30°$, $\therefore \angle FOB = 60°$,

$\therefore \angle AOB = 120°$.

$\therefore$ 弧 AB 的长 $= \dfrac{120\pi \times 3}{180} = 2\pi$ (米), 选(B).
~~~~~~

7. 双曲线$9x^2-16y^2=1$的焦距是______.

8. 若$(x+2)^n=x^n+\cdots+ax^3+bx^2+cx+2^n(n\in\mathbf{N}$, 且$n\geqslant 3)$, 且$a:b=3:2$, 则$n=$________.

9. 设数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n(n\in\mathbf{N})$. 关于数列$\{a_n\}$有下列三个命题:

(1) 若$\{a_n\}$既是等差数列又是等比数列, 则$a_n=a_{n+1}\ (n\in\mathbf{N})$;

(2) 若$S_n=an^2+bn\ (a、b\in\mathbf{R})$, 则$\{a_n\}$是等差数列;

(3) 若$S_n=1-(-1)^n$, 则$\{a_n\}$是等比数列.

这些命题中，真命题的序号是________.

10. 若集合$A=\{x|3\cos 2\pi x=3^x, x\in\mathbf{R}\}, B=\{y|y^2=1, y\in\mathbf{R}\}$, 则$A\cap B=$________.

11. 函数$y=\sin x+\arcsin x$的值域是________.

12. 已知函数$f(x)=2^x+\log_2 x$, 数列$\{a_n\}$的通项公式是$a_n=0.1n\ (n\in\mathbf{N})$, 当$|f(a_n)-2005|$取得最小值时, $n=$________.

二、选择题 (本大题满分16分) 本大题共有4题, 每题都给出四个结论, 其中有且只有一个结论是正确的, 必须把正确结论的代号写在题后的圆括号内, 选对得 4分, 否则一律得零分.

13. 已知直线l、m、n及平面α, 下列命题中的假命题是

(A) 若$l/\!/m, m/\!/n$, 则$l/\!/n$.

(B) 若$l\perp\alpha, n/\!/\alpha$, 则$l\perp n$.

(C) 若$l\perp m, m/\!/n$, 则$l\perp n$.

(D) 若$l/\!/\alpha, n/\!/\alpha$, 则$l/\!/n$.

[答] ( )

14. 在$\triangle ABC$中, 若$\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$, 则$\triangle ABC$是

(A) 直角三角形. (B) 等边三角形.

(C) 钝角三角形. (D) 等腰直角三角形.

[答] ( )

15. 若a、b、c是常数, 则“$a>0$且$b^2-4ac<0$”是“对任意$x\in\mathbf{R}$, 有$ax^2+bx+c>0$”的

(A) 充分不必要条件.

(B) 必要不充分条件.

(C) 充要条件.

(D) 既不充分又不必要条件.

[答] ( )

16. 设函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$, 有下列三个命题:

(1) 若存在常数M, 使得对任意$x\in\mathbf{R}$, 有$f(x)\leqslant M$, 则M是函数$f(x)$的最大值;

(2) 若存在$x_0\in\mathbf{R}$, 使得对任意$x\in\mathbf{R}$, 且$x\neq x_0$, 有$f(x)<f(x_0)$, 则$f(x_0)$是函数$f(x)$的最大值;

(3) 若存在$x_0\in\mathbf{R}$, 使得对任意$x\in\mathbf{R}$, 有$f(x)\leqslant f(x_0)$, 则$f(x_0)$是函数$f(x)$的最大值.

这些命题中, 真命题的个数是

(A) 0个. (B) 1个. (C) 2个. (D) 3个.

[答] ( )

三、解答题 (本大题满分86分) 本大题共有6题, 解答下列各题必须写出必要的步骤.

17. **(本题满分12分)**

已知z是复数, $z+2\mathrm{i}$、$\dfrac{z}{2-\mathrm{i}}$均为实数 (i为虚数单位), 且复数$(z+a\mathrm{i})^2$在复平面上对应的点在第一象限, 求实数a的取值范围.

18. **(本题满分12分)**

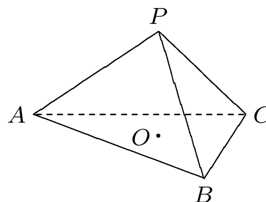
已知$\tan\alpha$是方程$x^2+2x\sec\alpha+1=0$的两个根中较小的根, 求α的值.

19. **(本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.**

已知正三棱锥$P-ABC$的体积是$72\sqrt{3}$, 侧面与底面所成的二面角的大小为$60°$.

(1) 证明: $PA\perp BC$;

(2) 求底面中心O到侧面的距离.



20. **(本题满分14分) 本题共有2个小题, 第1小题满分6分, 第2小题满分8分.**

某市2004年底有住房面积1200万平方米, 计划从2005年起, 每年拆除20万平方米的旧住房. 假定该市每年新建住房面积是上年年底住房面积的5%.

(1) 分别求2005年底和2006年底的住房面积;

(2) 求2024年底的住房面积 (计算结果以万平方米为单位, 且精确到0.01).

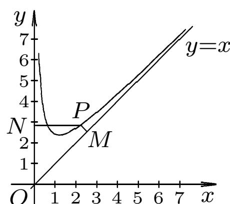
21. **(本题满分16分) 本题共有3个小题, 第1小题满分3分, 第2小题满分6分, 第3小题满分7分.**

已知函数 $f(x)=x+\frac{a}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$, 且 $f(2)=2+\frac{\sqrt{2}}{2}$. 设点 P 是函数图象上的任意一点, 过点 P 分别作直线 $y=x$ 和 y 轴的垂线, 垂足分别为 M、N.

(1) 求 a 的值;

(2) 问: $|PM|\cdot|PN|$ 是否为定值? 若是, 则求出该定值, 若不是, 则说明理由;

(3) 设 O 为坐标原点, 求四边形 $OMPN$ 面积的最小值.



22. **(本题满分18分) 本题共有3个小题, 第1小题满分5分, 第2小题满分8分. 第3小题满分5分.**

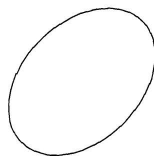
(1) 求右焦点坐标是 $(2,\ 0)$, 且经过点 $(-2,-\sqrt{2})$ 的椭圆的标准方程;

(2) 已知椭圆 C 的方程是

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0).$$

设斜率为 k 的直线 l, 交椭圆 C 于 A、B 两点, AB 的中点为 M. 证明: 当直线 l 平行移动时, 动点 M 在一条过原点的定直线上;

(3) 利用 (2) 所揭示的椭圆几何性质, 用作图方法找出下面给定椭圆的中心, 简要写出作图步骤, 并在图中标出椭圆的中心.



参考答案

一、(第1至12题)

1. $\{-1,2\}$.　2. 0.　3. $\frac{1}{2}$.

4. $-\sqrt{-x}, x\in(-\infty,-4]$.

5. 16.　6. $\frac{1}{260}$.　7. $\frac{5}{6}$.　8. 11.

9. (1)、(2)、(3).　10. $\{1\}$.

11. $\left[-\sin 1-\frac{\pi}{2},\sin 1+\frac{\pi}{2}\right]$.

12. 110.

二、(第13至16题)

题号	13	14	15	16
代号	D	B	A	C

三、(第17至22题)

17. [解] 设 $z=x+y\mathrm{i}$ (x、$y\in\mathbf{R}$),

$\because z+2\mathrm{i}=x+(y+2)\mathrm{i}$,

由题意得 $y=-2$.

$\because \frac{z}{2-\mathrm{i}}=\frac{x-2\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{1}{5}(x-2\mathrm{i})(2+\mathrm{i})=\frac{1}{5}(2x+2)+\frac{1}{5}(x-4)\mathrm{i}$, 由题意得 $x=4$.

$\therefore z=4-2\mathrm{i}$.

$\because (z+a\mathrm{i})^2=(12+4a-a^2)+8(a-2)\mathrm{i}$,

根据条件, 可知 $\begin{cases}12+4a-a^2>0,\\ 8(a-2)>0,\end{cases}$

解得 $2<a<6$,

$\therefore$ 实数 a 的取值范围是 $(2,\ 6)$.

18. [解] $\because \tan\alpha$ 是方程 $x^2+2x\sec\alpha+1=0$ 的较小根,

$\therefore$ 方程的较大根是 $\cot\alpha$.

$\because \tan\alpha+\cot\alpha=-2\sec\alpha$, 即 $\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=-\frac{2}{\cos\alpha}$,

$\therefore \sin\alpha=-\frac{1}{2}$.

解得 $\alpha=2k\pi+\frac{7\pi}{6}$, 或 $\alpha=2k\pi-\frac{\pi}{6}, k\in\mathbf{Z}$.

当 $\alpha=2k\pi+\frac{7\pi}{6}$ ($k\in\mathbf{Z}$)时,

$\tan\alpha=\frac{\sqrt{3}}{3}, \cot\alpha=\sqrt{3}$;

当$\alpha = 2k\pi - \dfrac{\pi}{6}$ ($k \in \mathbf{Z}$)时,

$\tan\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \cot\alpha = -\sqrt{3}$, 不合题意.

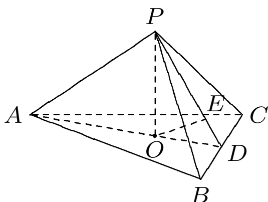
$\therefore \alpha = 2k\pi + \dfrac{7\pi}{6}, k \in \mathbf{Z}$.

19. [证明] (1) 取BC边的中点D, 连接AD、PD, 则$AD \perp BC, PD \perp BC$, 故$BC \perp$平面APD.

$\therefore PA \perp BC$.

[解] (2) 如图, 由(1)可知平面$PBC \perp$平面APD,

则$\angle PDA$是侧面与底面所成的二面角的平面角.



过点O作$OE \perp PD, E$为垂足,

则OE就是点O到侧面的距离.

设OE为h,

由题意可知点O在AD上,

$\therefore \angle PDO = 60^\circ, OP = 2h$.

$\because OD = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$, $\therefore BC = 4h$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}(4h)^2 = 4\sqrt{3}h^2$,

$\because 72\sqrt{3} = \dfrac{1}{3} \cdot 4\sqrt{3}h^2 \cdot 2h = \dfrac{8\sqrt{3}}{3}h^3$,

$\therefore h = 3$.

即底面中心O到侧面的距离为3.

20. [解] (1) 2005年底的住房面积为

$1200(1+5\%) - 20 = 1240$ (万平方米),

2006年底的住房面积为

$1200(1+5\%)^2 - 20(1+5\%) - 20 = 1282$ (万平方米).

$\therefore$ 2005年底的住房面积为1240万平方米, 2006年底的住房面积为1282万平方米.

(2) 2024年底的住房面积为

$$1200(1+5\%)^{20} - 20(1+5\%)^{19} - 20(1+5\%)^{18} - \cdots - 20(1+5\%) - 20$$
$$= 1200(1+5\%)^{20} - 20 \times \frac{1.05^{20}-1}{0.05}$$
$$\approx 2522.64 \text{(万平方米)},$$

$\therefore$ 2024年底的住房面积约为2522.64万平方米.

21. [解] (1) $\because f(2) = 2 + \dfrac{a}{2} = 2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore a = \sqrt{2}$.

(2) 设点P的坐标为(x_0, y_0),

则有$y_0 = x_0 + \dfrac{\sqrt{2}}{x_0}, x_0 > 0$,

由点到直线的距离公式可知:

$|PM| = \dfrac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{x_0}, |PN| = x_0$,

故有$|PM| \cdot |PN| = 1$, 即$|PM| \cdot |PN|$为定值, 这个值为1.

(3) 由题意可设$M(t,t)$, 可知$N(0, y_0)$.

$\because PM$与直线$y = x$垂直,

$\therefore k_{PM} \cdot 1 = -1$, 即$\dfrac{y_0 - t}{x_0 - t} = -1$, 解得$t = \dfrac{1}{2}(x_0 + y_0)$, 又$y_0 = x_0 + \dfrac{\sqrt{2}}{x_0}$,

$\therefore t = x_0 + \dfrac{\sqrt{2}}{2x_0}$.

$\therefore S_{\triangle OPM} = \dfrac{1}{2x_0^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$S_{\triangle OPN} = \dfrac{1}{2}x_0^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

$\therefore S_{\triangle MPN} = S_{\triangle OPM} + S_{\triangle OPN}$

$= \dfrac{1}{2}\left(x_0^2 + \dfrac{1}{x_0^2}\right) + \sqrt{2} \geqslant 1 + \sqrt{2}$,

当且仅当$x_0 = 1$时, 等号成立.

$\therefore$ 此时四边形$OMPN$面积有最小值$1 + \sqrt{2}$.

22. [解] (1) 设椭圆的标准方程为

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$,

$\therefore a^2 = b^2 + 4$,

即椭圆的方程为$\dfrac{x^2}{b^2+4} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$,

$\because$ 点$(-2, -\sqrt{2})$在椭圆上,

$\therefore \dfrac{4}{b^2+4} + \dfrac{2}{b^2} = 1$,

解得$b^2 = 4$或$b^2 = -2$(舍), 由此得$a^2 = 8$, 即椭圆的标准方程为$\dfrac{x^2}{8} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

(2) 设直线l的方程为$y = kx + m$, 与椭圆

(下转第2–26页)

俄罗斯统一高考数学试题

200062 华东师范大学出版社 倪 明

中国的教育改革, 正受到“高考”瓶颈的制约. 关注近几年来俄罗斯高考制度的改革, 可以获得一些有意义的启示.

为了实行教育平等和遏止教育腐败, 俄罗斯从2001年开始组织统一高考, 各个地方自愿参加. 2004年考生已近一百万, 计划于2006～2008年分阶段逐步在全国范围内实施. 值得注意的是, 考题与我国雷同, 考试时间为4小时, 评分标准很严. 刚刚公布的15岁学生的国际数学测试PISA, 时间是3小时15分钟. 我国为什么只能在2小时内完卷? 考生根本无法思考!

俄罗斯数学统一考试的内容包含了中学数学课程的所有内容. 具体内容是: 表达式与变换、方程与不等式、函数与分析、数与计算、几何图形及其性质、几何量的度量等.

一、试题的结构

2004年的数学试题由三部分组成:

第一部分为选择题, 有4个被选项, 只有1个是正确的. 共有14道题目 (A1～A14), 内容涉及“代数与分析初步”, 相对而言, 题目最为容易.

第二部分为填空题, 它的答案是整数或小数, 只需写出数值, 不必写度量单位. 共有9道题目 (B1～B9), 内容涉及“5～6年级数学”、“7～9年级代数”、“10～11年级代数与分析初步”、“7～11年级几何”, 题目难度以中档题为主.

第三部分为解答题, 要求考生写出详细的解答过程. 共有4道题目 (C1～C4). 考查考生具有综合应用能力的水平. 在解题过程中体现分析问题的能力, 建立数学模型的能力, 应用数学方法的能力, 进行数学讨论的能力, 完整、规范表述的能力. 题目的内容范围与第二部分相同, 以难题为主.

二、评分的原则

统一考试的题目的数量在25～30题范围内, 2004年的试题共有27题, 其中14道选择题和9道填空题每题1分, 4道解答题每题4分, 共39分.

由于选择题、填空题都是客观题, 答题用规范的答题纸, 采用自动化阅卷的方式, 大大提高了评定的客观性和工作效率. 而解答题则由高校教师、教学专家和部分优秀中学教师进行评定, 具体评分的原则如下.

4分的要求:

解的步骤完整, 顺序正确; 解的每一步论述充分; 解答中所需的作图、图象和插图完全正确; 正确完成所有的推导和计算, 并得到正确答案.

3分的要求:

解的步骤完整, 顺序正确; 解的关键步骤论述充分; 解答中所需的作图、图象和插图完全正确; 允许有一个笔误和不大的计算错误(可能导致答案不正确).

2分的要求:

整体推导正确, 但有可能解的步骤不完整或者缺少部分解的关键点的论据; 同时允许作图、图象、插图中存在不大的错误, 在计算和推导过程中允许一两个不大的错误或笔误(这种错误可能得到不正确的答案), 但不影响解的后续步骤的正确性.

1分的要求:

总的思想、方法正确, 但有某些中间步骤没有完成或者没有做完; 大多数关键点没有论证或有不正确的论证; 同时允许作图、图象、插

图中存在不大的错误, 在计算和推导过程中允许有不大的错误(这种错误可能得到不正确的答案).

不能满足上述要求的, 只能是0分.

特别注意: 这里评定0、1、2、3、4分不是平均的, 也就是“如果题目解出75%得3分, 做出一半得2分”的想法是错误的. 打3分的解实质上接近于理想的4分, 只是在推导或计算上有一些小的差错. 这一要求似乎比我们的评分标准要紧.

分数可以转化为百分制. 2003年得满分39分, 即100分的有148人, 平均分为49.89分.

三、数学高考样题

(考试时间: 四小时内完卷)

第一部分

A1 计算: $25^{\frac{3}{2}}-0.25=$

(1) 37.25; (2) 14.75;

(3) 124.75; (4) 26.25.

A2 化简表达式: $3\cos^2 x+3\sin^2 x-6=$

(1) 1; (2) -5; (3) 3; (4) -3.

A3 化简表达式: $\sqrt[4]{625m^8}=$

(1) $25m^2$; (2) $5m^2$;

(3) $-25m^2$; (4) $-5m^2$.

A4 表达式$0.3^{\log_{0.3}2}-5$的值是

(1) -4.91; (2) -4.7;

(3) -4; (4) -3.

A5 包含方程$7^{5x+6}=49$的根的区间是

(1) $[4,-1)$; (2) $[-1,0]$;

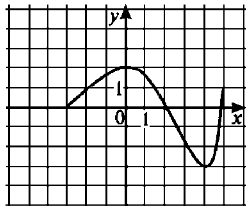
(3) $(0,2)$; (4) $[5,9]$.

A6 方程$\log_2(x+8)=\log_2 3+\log_2 5$的根所属的区间是

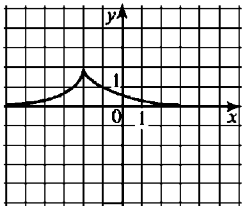
(1) $(-8,-5]$; (2) $(-1,3)$;

(3) $(3,5)$; (4) $[5,8]$.

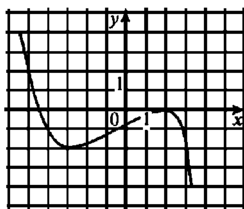
A7 在区间$[-3,2]$上函数递增的图象是



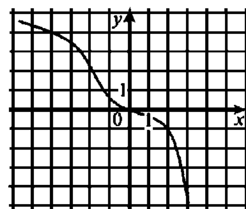
(1)



(2)



(3)



(4)

A8 不等式$\dfrac{(2x-3)(x+2)}{x-6}\leqslant 0$的解集是

(1) $(-\infty,-2]\cup[1.5,6)$;

(2) $(-\infty,-1.5]\cup[2,6)$;

(3) $(-\infty,-2]\cup[3,6)$;

(4) $[-2,1.5]\cup[6,+\infty)$.

A9 函数$y=\sin x-2x$的导数在点$x_0=0$的值是

(1) 1; (2) 0;

(3) -3; (4) -1.

A10 函数$y=\sqrt[6]{1-\log_{0.7}x}$的定义域是

(1) $[0.7,+\infty)$; (2) $(0,\ 0.7]$;

(3) $(-\infty,0.7]$; (4) $(0.7,+\infty)$.

A11 函数$y=6^x-12$的值域是

(1) $(0,+\infty)$; (2) $(-12,+\infty)$;

(3) $[-12,+\infty)$; (4) $(-\infty,-12)$.

A12 方程$\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$的解是

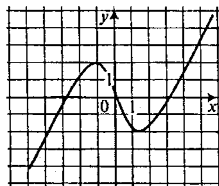
(1) $(-1)^n\dfrac{\pi}{3}+n\pi, n\in\mathbf{Z}$;

(2) $\pm\dfrac{\pi}{3}+n\pi, n\in\mathbf{Z}$;

(3) $\dfrac{\pi}{3}+n\pi, n\in\mathbf{Z}$;

(4) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2n\pi, n\in\mathbf{Z}$.

A13 下图给出了函数$y=f(x)$的图象. 方程$f(x)=4$的根所在的区间是



(1) $(-6,-4)$; (2) $(5,\ 7)$;

(3) $(-2,0)$; (4) $(0,\ 2)$.

A14 经过函数$y=\mathrm{e}^x-x^2$横坐标$x_0=1$的点引切线, 这条切线与横轴夹角的正切值是

(1) e−2;　　(2) −1;

(3) e−1;　　(4) −2.

第二部分

这一部分题目的答案是整数或小数, 只需写出数值, 不必写度量单位.

B1 求表达式

$$\cos 15^\circ(\cos 50^\circ \sin 65^\circ-\cos 65^\circ \sin 50^\circ)$$

的值.

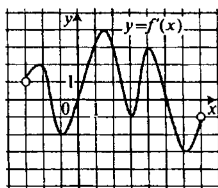
B2 求方程

$$(3^{2x^2-29}-27)\sqrt[4]{5x+18}=0$$

根的和.

B3 求曲线(直线)$y=8x-6x^2, x=\frac{1}{2}, x=1, y=0$围成的图形的面积.

B4 函数$y=f(x)$定义在区间$(-3,7)$上, 其导数如下图所示, 请指出函数$y=f(x)$在区间$(-3,7)$上极小值的个数.



B5 求函数$y=\dfrac{40}{2^x+3^x}$在区间$[1,7]$上的最大值.

B6 求函数$y=\ln(x-2|x-3|)$在其定义域内所有整数的和.

B7 计划生产新的电子仪器, 企业的经济专家决定, 第一个月制造200台仪器, 以后每月增加生产20台. 按此计划, 经过几个月企业能制造11000台?

B8 正四棱锥底面与侧面的二面角等于45°, 而侧面积为$36\sqrt{2}$, 求棱锥的体积.

B9 在等腰梯形中, 它的一个角为60°, 它的内切圆面积为$24\sqrt{3}$, 求该圆的半径.

第三部分

这部分解答, 写在专门的答案纸上, 先写上题号(如C1等), 随后给出完整的解答.

C1 解方程组

$$\begin{cases}\log_{0.9}(2y-3x+1)=0,\\ 0.5\log_2(3y-x-1.5)+\log_4(8x)=0.\end{cases}$$

C2 矩形的边长为2和5, 经过它的短边上的点作直线, 使得所截得的直角三角形的周长为8, 求矩形留下部分面积的最小值.

C3 半径为2的球与平面切于A点, 一圆锥的底面也在这个平面上. 过圆锥底面的圆心(点C)和球面上的一点(过A点球的直径的另一个端点)作直线, 和球面与圆锥的切点M(它们惟一的公共点)相交. 如果$AC=1$, 求圆锥的高.

C4 求参数a的所有值, 使得不等式

$$x(x-2)\leqslant(a+1)(|x-1|-1)$$

的解集包含以1.7为首项、公比为正数的无穷递减等比数列的所有项.

答案:

A1 (3).　**A2** (4).　**A3** (2).

A4 (4).　**A5** (2).　**A6** (4).

A7 (3).　**A8** (1).　**A9** (4).

A10 (1).　**A11** (2).　**A12** (2).

A13 (2).　**A14** (1).

B1 0.25.　**B2** 0.4.

B3 1.25.　**B4** 2.

B5 8.　**B6** 12.

B7 25.　**B8** 36.

B9 3.

C1 $(0.5, 0.75)$.　**C2** $\frac{22}{3}$.

C3 $\frac{4}{15}$.　**C4** $(-\infty, 0.7]$.

参考文献

【1】Денищева Л.О., Краснянская К.А., Мельникова Н.Б. *Единый государственный экзамен по математике в 2004 году.* Математика в школе, 2004.1.

【2】Глазков Ю.А., Рязановский А. Р., Семенов П.В. *Решения заданий демонстрационной версии контрольно-измерительных материалов ЕГЭ-2004.* Математика в школе, 2004.2.

⊙?⊙⊙

数 学 问 题 与 解 答

2004年第12期问题解答

⊙⊙!⊙

631. $\odot O$与凸四边形$ABCD$的四边皆相切. $AB=a$, $BC=b$, $CD=c$, $DA=d$, 求证: $OA\cdot OC+OB\cdot OD=\sqrt{abcd}$.

图 1

证: 如图1, 作$\triangle NDC\backsim\triangle OAB$, $\triangle MAB\backsim\triangle ODC$.

将相等的角标为$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$.

又$\angle CND=\angle BOA$, $\angle BMA=\angle COD$.

由$\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=\dfrac{1}{2}$四边形$ABCD$内角和$=180°$知,

$\angle AOB+\angle COD=180°$,

$\therefore\ \angle AOB+\angle BMA=180°$,

$\angle COD+\angle CND=180°$,

从而O、A、M、B; O、C、N、D分别四点共圆.

由托拉密定理, $OA\cdot MB+OB\cdot MA=a\cdot OM$,

即$OA\cdot OC\cdot\dfrac{a}{c}+OB\cdot OD\cdot\dfrac{a}{c}=a\cdot OM$,

$\therefore\ OA\cdot OC+OB\cdot OD=c\cdot OM$.

同理可得$OA\cdot OC+OB\cdot OD=a\cdot ON$.

$\therefore\ OA\cdot OC+OB\cdot OD$

$=\sqrt{ac\cdot OM\cdot ON}$ ………………………… ①

令$\triangle OAB$、$\triangle OBC$、$\triangle OCD$、$\triangle ODA$的外接圆直径依次为m_1、m_2、m_3、m_4.

注意$\angle ODN$与$\angle AOD$互补, $\angle OBM$与$\angle BOC$互补, 有

$\dfrac{ON}{m_3}=\sin\angle ODN=\sin\angle AOD=\dfrac{d}{m_4}$,

$\therefore\ \dfrac{ON}{d}=\dfrac{m_3}{m_4}$;

$\dfrac{OM}{m_1}=\sin\angle OBM=\sin\angle BOC=\dfrac{b}{m_2}$,

$\therefore\ \dfrac{b}{OM}=\dfrac{m_2}{m_1}$.

但$\sin\angle 1\cdot m_1=OB=\sin\angle 3\cdot m_2$, 即$\dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3}$;

同理可得 $\dfrac{m_3}{m_4}=\dfrac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3}$.

$\therefore\ \dfrac{m_2}{m_1}=\dfrac{m_3}{m_4}$,

即$\dfrac{ON}{d}=\dfrac{b}{OM}$,

$bd=OM\cdot ON$.

代入①, 即得

$OA\cdot OC+OB\cdot OD=\sqrt{abcd}$.

632. $\triangle ABC$的内切圆切边BC、CA、AB于D、E、F三点, 过D作$DG\perp EF$于G, 连结BG、CG并延长交AC、AB于H、I. 已知HE=3, IF=4, BC=21, 求$\triangle ABC$的面积.

解: 如图2, 连结FD.

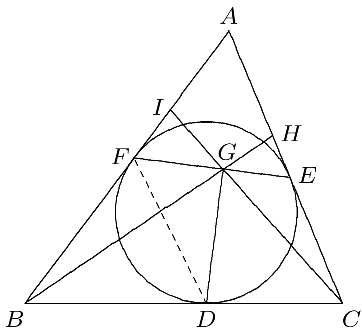


图 2

$\because\ FG = FD\cos\angle DFG$

$= 2FB\cos\angle BFD\cos\angle DFG$

$= 2FB\cos\dfrac{\pi-B}{2}\cos\dfrac{\pi-C}{2}$

$= FB\cdot 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$,

$\therefore\ \dfrac{FG}{FB} = 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

同理 $\dfrac{EG}{EC} = 2\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

于是 $\dfrac{FG}{FB} = \dfrac{EG}{EC}$.

又 $\because\ \angle GFB = \angle GEC$,

$\therefore\ \triangle GFB \backsim \triangle GEC$,

进而可知$\triangle IFG \backsim \triangle HEG$. 于是
$\dfrac{FB}{EC} = \dfrac{FG}{EG} = \dfrac{IF}{HE} = \dfrac{4}{3}$.
注意到$BC = FB + EC = 21$,

可得$FB = 12$, $EC = 9$.

设$AF = AE = x$, 则在$\triangle AEF$中, 由梅涅劳斯定理可得
$\dfrac{AB}{BF}\cdot\dfrac{FG}{GE}\cdot\dfrac{EH}{HA} = \dfrac{x+12}{12}\cdot\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3}{x-3} = 1$, 解得$x = \dfrac{21}{2}$.

于是$\triangle ABC$的三边长为$AC=\dfrac{39}{2}$, $BC = 21$, $AB = \dfrac{45}{2}$. 由海伦公式得$\triangle ABC$的面积为189.

633. 已知x_1、x_2、$\cdots$、$x_{2005} \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2005} = \dfrac{2005\pi}{6}$, 求

$$y = \sum_{i=1}^{2005}\frac{6x_i\sin x_i - \pi\sin x_i}{3+2\sin x_i}$$

的最小值.

解: 令$g(t) = \dfrac{\sin t}{3+2\sin t}$,

设$-\dfrac{\pi}{2} < t_1 < t_2 < \dfrac{\pi}{2}$, 则

$g(t_1) - g(t_2) = \dfrac{\sin t_1}{3+2\sin t_1} - \dfrac{\sin t_2}{3+2\sin t_2}$
$= \dfrac{3(\sin t_1 - \sin t_2)}{(3+2\sin t_1)(3+2\sin t_2)} < 0$,

$\therefore\ g(t_1) < g(t_2)$, $g(t)$是$\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$上的增函数.

令$x_1 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, 则

$\left(x_1-\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\dfrac{\sin x_1}{3+2\sin x_1}-\dfrac{\frac{1}{2}}{3+2\cdot\frac{1}{2}}\right) \geqslant 0$,

$\dfrac{6x_1-\pi}{6}\cdot\dfrac{\sin x_1}{3+2\sin x_1} \geqslant \dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{6x_1-\pi}{6}$,

即 $\dfrac{6x_1\sin x_1 - \pi\sin x_1}{3+2\sin x_1} \geqslant \dfrac{6x_1-\pi}{8}$.

同理,
$\dfrac{6x_2\sin x_2 - \pi\sin x_2}{3+2\sin x_2} \geqslant \dfrac{6x_2-\pi}{8}, \cdots,$
$\dfrac{6x_{2005}\sin x_{2005} - \pi\sin x_{2005}}{3+2\sin x_{2005}}$
$\geqslant \dfrac{6x_{2005}-\pi}{8}$.

将以上各不等式相加得
$\displaystyle\sum_{i=1}^{2005}\frac{6x_i\sin x_i - \pi\sin x_i}{3+2\sin x_i}$
$\geqslant \dfrac{6(x_1+x_2+\cdots+x_{2005})-2005\pi}{8} = 0$.

可见, 当且仅当$x_1 = x_2 = \cdots = x_{2005} = \dfrac{\pi}{6}$时, $y_{\min} = 0$.

634. 如图3, 在四棱锥$P-ABCD$中, 底面$ABCD$是矩形, $PB\perp$底面$ABCD$, 求证: $\angle DPC + \angle DPA > \angle DPB$.

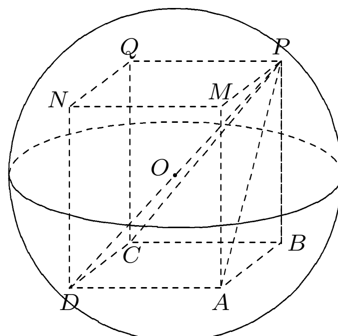


图 3

证: 如图3, 将四棱锥$P-ABCD$补成长方体$MPQN-ABCD$, 再作该长方体的外接球O, 不难得到O是PD的中点.

设球O的半径为R, $\angle DPC$、$\angle DPA$、$\angle DPB$的弧度数分别为α_1、α_2、α_3.

由于P、D、C在大圆上, 故D、C两点间的球面距离是$2R\alpha_1$.

同理, C、B两点间的球面距离和D、A两点间的球面距离都是$2R\alpha_2$, D、B两点间的距离是$2R\alpha_3$.

因为D、C、B三点不在球O的同一个大圆上, 从而D、C两点间的球面距离与C、B两点的球面距离之和大于D、B两点间的球面距离, 即$2R\alpha_1+2R\alpha_2>2R\alpha_3$.

所以$\alpha_1+\alpha_2>\alpha_3$.

亦即$\angle DPC+\angle DPA>\angle DPB$.

635. 正整数数列中除去数列$\{2n^2-n\}$ ($n\in\mathbf{N}^*$)的所有项由小到大依次构成数列$\{a_n\}$, 求$\{a_n\}$的通项公式.

解: 设$b_n=2n^2-n$.

$\because$ $b_1=1$, $b_{k+1}-b_k-1=4k$, $k\in\mathbf{Z}^+$,

$\therefore$ 正整数列$1, 2, 3, \cdots$ 中, b_k与b_{k+1}之间有$4k$个数, 它们都是$\{a_n\}$的项, 所有这些数从小到大依次排列构成数列$\{a_n\}$. 因此把数列$\{a_n\}$分组:

$(2, 3, 4, 5)$, $(7, 8, \cdots, 14)$, $\cdots$, $(2k^2-k+1, 2k^2-k+2, \cdots, 2k^2-k+4k)$, $\cdots$ 其中第k组有$4k$个数.

设a_n在第k组, 则第$k-1$组共有$4+8+\cdots+4(k-1)=2k^2-2k$项, 故

$a_n=2k^2-k+[n-(2k^2-2k)]=n+k$, 且$k$为满足$2k^2-2k+1\leqslant n$的最大整数.

由$2k^2-2k+1\leqslant n$得

$0<k\leqslant\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{4}}$.

$\therefore$ $k=\left[\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{4}}\right]$, 其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

故$a_n=n+\left[\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{2}n-\dfrac{1}{4}}\right]$.

2005年第2期问题

636. 如图4, $\triangle ABC$的内切圆$\odot O$切BC边于D, DE为$\odot O$的直径, AE的延长线交BC于F, 求证: $BD=CF$.

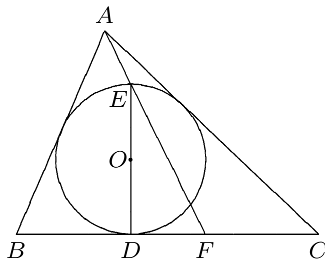


图 4

(安徽　王秉春供题)

637. 如图5, $\angle AFE=\angle ACB$, $\triangle AEF$与$\triangle ABC$面积相等, $EC\perp AB$, $FB\perp AE$, 求证: $AB=AE$.

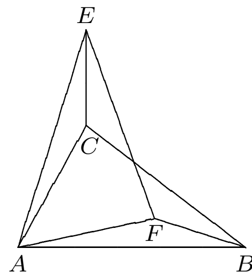


图 5

(湖南　厉　倩供题)

638. 求证: 锐角三角形的垂心到各顶点的距离之积不大于其内心到各顶点的距离之积.

(安徽　李　明供题)

639. 设$\{a_n\}$为正项等差数列, 其任意前n项的和$S_n\geqslant 2$, m、n、k为正整数, 求证:

(1) 若$m+k=2n$, 则$S_m+S_k\leqslant S_n^2$;

(2) $S_1+S_2+\cdots+S_{2n+1}<\left(\dfrac{nS_n+1}{2}\right)^2$.

(安徽　盛宏礼供题)

640. a、b、c是三个正数, 求证: $\dfrac{1}{a(1+b)}+\dfrac{1}{b(1+c)}+\dfrac{1}{c(1+a)}\geqslant\dfrac{3}{\sqrt[3]{abc}(1+\sqrt[3]{abc})}$.

(江苏　李广修供题)

(本栏目责任编辑　李大元　汪纯中)

华东师范大学网络教育学院2005年招生简章

华东师范大学是教育部直属的全国重点大学，拥有雄厚的师资力量和先进的教育设施. 华东师范大学网络教育学院从2001年开始招生, 是教育部批准成立的68所网络教育学院之一, 也是2003年教育部组建的全国教师教育网络联盟的主要成员单位. 华东师范大学网络教育学院成立以来一直在为各类在职教师和其他人员提高学历及继续学习提供机会. 学院现设有专科层次三个专业, 专升本层次十八个专业, 每年的春秋两季招生(专升本、专科), 教育硕士四个专业.

一、招生对象及条件

1. 专科: 具有普通高中、职业高中、技术学校、中等专业学校(成人中专)毕业文凭者或其它同等学历者.

2. 专升本: 具有国民教育系列应届、历届大学专科(含高职)毕业的各类在职教师及相关专业人士, 且具有所报专业的专业学习基础.

3. 教育硕士: 具有国民教育系列国家承认的大学本科学历和学士学位, 有三年以上教学经历, 未获得学士学位者, 除满足上述条件外, 还应具有相当中学一级教师任职资格.

二、招生专业

专科: 行政管理、教育学(设有四个专业方向: 小学语文、小学数学、小学体育、学前教育)会计学.

专升本: 汉语言文学、数学与应用数学、英语、计算机科学与技术、工商管理、教育学、学前教育、行政管理、体育教育、历史学、生物科学、地理科学、法学、教育信息技术、应用心理学、旅游管理、化学、物理.

教育硕士: 教育管理、学科教学(语文)、学科教学(数学)、学科教学(英语).

三、学制

专科: 学习期限2年～4年. 专升本: 学习期限2.5年～6年. 教育硕士: 3年～4年.

四、入学考试

专升本、专科: 参加全国教师教育网络联盟联合考试. 教育硕士: 参加全国在职攻读硕士学位联考.

五、考试时间

专升本、专科:2005年2月、8月. 教育硕士:2005年10月(全国统考).

六、教学管理及学习形式

1. 教学管理采用学分制.

专升本、专科: (各专业约80学分左右). 学生学完教学计划规定的课程, 修满规定学分, 考试成绩合格, 专升本学生在读期间必须通过全国现代远程教育试点学校网络教育公共课统一考试(英语、计算机), 则发给国家承认的华东师范大学(网络教育)毕业文凭, 符合学士学位授予条件者, 将授予学士学位. 教育硕士: 成绩合格, 并通过毕业论文答辩, 颁发国家学位办的学位证书.

2. 学习形式.

全业余. 学生将以网上视频点播、课程网页浏览、教学光盘自学、网上作业答疑、在线讨论、站点面授辅导等方式进行自主学习.

七、说明

其它信息可从华东师范大学网络教育学院网站上查询.

网址: http://www.dec.ecnu.edu.cn

咨询电话: 62232037、62232034.

Email: office@dec.ecnu.edu.cn

华东师范大学网络教育学院

2005年1月18日

(上接第2–23页)

$\overset{①\times②}{\Longleftrightarrow} \frac{1}{3} \leqslant \frac{x^2}{x+1} \leqslant 2$,

但由 $\begin{cases} \frac{x^2}{x+1} \leqslant 2 \\ \frac{1}{3} \leqslant \frac{x^2}{x+1} \end{cases}$ 不能推出 $1 \leqslant x \leqslant 2$.

故此步不可逆.

需另觅它法如下: $y = \frac{x^2}{x+1}$, $x \in [1,2]$, $y' = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$. 当 $x \in [1,2]$, $y' > 0$,

$\therefore y = \frac{x^2}{x+1}$ 在 $[1,2]$ 为增函数.

$\therefore f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(2), \left(f(x) = \frac{x^2}{x+1}\right)$,

即 $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{4}{3}$, 故函数 $y = \frac{x^2}{x+1}, x \in [1,2]$ 的值域为 $\frac{1}{2} \leqslant y \leqslant \frac{4}{3}$.

恭祝广大读者身体健康! 新春快乐!

编后漫笔

关于“双基”和高考

——兼谈数学高考时间是否可延为3小时

张奠宙　赵小平

本期刊登了2004年数学教育高级研讨班的学术纪要. 这次研讨的主题是“基础与创造”. 发言的很多, 却漏了一个重要方面: 高考和双基的关系.

扎实双基和严酷高考, 都是中国数学教育的特色. 高考难以评价创造性, “基础题”占绝大多数, 于是, 教学上大力加强基础训练.

从好的方面说, 高考和中考注重数学基础的检验, 有利于双基数学教学的落实. 从不好的方面说, 由于高考的过度竞争, 导致双基异化, 基础过剩.

今年某地春季高考, 几乎全部是基础题. 新颖的应用大题、开放题、情景题、建模题没有了. 如此指挥, 基础是打扎实了, 创新也就淡出了.

俄罗斯最近逐步实行全国统一高考, 题量和中国相同, 考试时间为4小时. 最近刚刚公布的2003年大面积国际数学测试PISA的考试时间为3小时15分. 著名的13岁学生参加的TIMMS考试简直不限制时间. 本刊去年第12期刊登的日本数学高考, 总共只需要做4个题(都是填充题), 时间是一小时.

请问, 我们为什么要在2小时内完成24个题目, 惹得大家都做不完, 需要飞快回答, 没有思考时间呢?

我们不期望高考制度有大的变革, 但是在命题内容和考试时间上, 应该运用新的思维: 数学高考延长为3小时如何?

“双基”毕竟是基础, 不能变成速算比赛, 给考生以思考的时间吧!

～～

第三届东亚地区数学教育国际会议(ICMI-EARCOME 3)将于2005年8月7日-12日在上海华东师大、南京师大、杭州师院举行. 目前, 会议的程序已基本确定, 论文征集工作正在进行, 在线注册也已经开始. 欢迎有兴趣的读者访问会议网站: http://www.math.ecnu.edu.cn/earcome3.

这次会议除了大会报告和小组演讲讨论外, 还特别为中小学数学教师另外安排了1天的教师研讨会(8月9日), 上、下午的主题分别是代数教学和概率统计教学. 为了使研讨会获得更好的效果, 也欢迎中小学教师来信告诉我们你们特别希望主讲人能够涉及的讨论主题.

来信请寄: earcome3@math.ecnu.edu.cn.

数学教学

SHU XUE JIAO XUE

2005年第2期

(总第209期)

主编: 张奠宙　赵小平

常务副主编: 忻重义

广告许可证: 沪工商广字07017号

主办单位: 华东师范大学

出　　版: 《数学教学》编辑部

邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)

印　　刷: 华东师范大学印刷厂

国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局

国内订阅: 全国各邮电局

定价: 3.80元　国内统一刊号: CN31–1024/G4　每月12日出版　代号: 4–357